Travaux dirigés sur la physique quantique - corrigé -

Problème : le principe d'incertitude de Heisenberg

1. Soit $\zeta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée.
   On considère maintenant l'opérateur :
   $$\hat{F} : \psi \longmapsto \Big((x,t) \longmapsto \zeta(x)\ \psi(x,t) \Big).$$
   On en déduit :
   $$\left\langle \hat{F}(t) \right\rangle = \int_{\mathbb{R}} \zeta(x) \cdot |\psi(x,t)|^2 \, dx,$$
   qui apparaît comme l'espérance de la variable aléatoire $\zeta(\cdot)$ vis-à-vis de la probabilité dont la densité est la fonction $\Big|\psi(\cdot,t)\Big|^2$.
   Par la loi forte des grands nombres, cette espérance est bien la valeur moyenne de la fonction ζ associée à l'opérateur $\hat{F}$.
2. On note pour tout $i \in I$, la valeur propre E_i associée au vecteur propre $\mid \psi_i \rangle$.
   On pose la décomposition du vecteur d'onde $\mid \psi(t) \rangle$ selon la base orthonormée :
   $$\mid \psi(t) \rangle = \sum_{i \in I} \alpha_i(t) \cdot \psi_i.$$
   En utilisant le caractère orthonormé de la base $(\psi_i)_{i \in I}$, on obtient facilement après un produit scalaire :
   $$\forall i \in I,\ \alpha_i(t) = \langle \psi_i \mid \psi(t) \rangle.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\Big\langle \psi(t) \mid \hat{F} \mid \psi(t) \Big\rangle &= \Big\langle \sum_{i\in I} \alpha_i(t)\cdot\psi_i \mid \hat{F} \mid \sum_{j\in I} \alpha_j(t)\cdot\psi_j \Big\rangle \\
&= \sum_{(i,j)\in I^2} \overline{\alpha_i(t)}\cdot\alpha_j(t)\cdot\langle \psi_i \mid \hat{F} \mid \psi_j\rangle \\
&= \sum_{(i,j)\in I^2} \overline{\alpha_i(t)}\cdot\alpha_j(t)\cdot E_j\cdot\langle \psi_i \mid \psi_j\rangle \\
&= \sum_{(i,j)\in I^2} \overline{\alpha_i(t)}\cdot\alpha_j(t)\cdot E_j\cdot\delta_{i,j} \\
&= \sum_{i\in I} \overline{\alpha_i(t)}\cdot\alpha_i(t)\cdot E_i \\
&= \sum_{i\in I} |\alpha_i(t)|^2\cdot E_i.
\end{aligned}$$

Ceci apparaît comme une moyenne sur toutes les valeurs propres E_i pour $i \in I$, cette moyenne étant pondérée par les poids positifs $|\alpha_i(t)|^2$ et de somme égale à 1. En effet, par le théorème de Pythagore, on obtient :

$$\sum_{i\in I} |\alpha_i(t)|^2 = \|\psi(t)\|^2 = 1.$$

3. Si a est un réel, en notant δ_a la mesure de Dirac concentrée en le point a et en prenant ψ_a la « densité de probabilité » associée à cette mesure de Dirac (on parle mathématiquement de distributions mais on s'éloigne largement du sujet ...), alors ψ_a est un vecteur propre pour l'opérateur $\hat{X}$ de valeur propre associée égale à a. On voit que les valeurs propres de cet opérateur sont liées aux positions de la particule quantique.

   Intuitivement, si ψ est une fonction d'onde, alors l'opérateur $\hat{X}$ renvoie à une variable aléatoire mesurant la position de la particule à l'instant t.

4. (a) On voit que :

   $$\hat{P} \mid \psi\rangle = -i\hbar\,(ik) \mid \psi\rangle = k\hbar \mid \psi\rangle.$$

   L'opérateur $\hat{P}$ mesure donc la quantité $k\hbar$.

   (b) Il reste à montrer que cette quantité correspond à l'impulsion de l'onde progressive. Or, on sait que :

   $$\begin{aligned}
   k\hbar &= \omega\times\frac{h}{2\pi c}\text{ , où } c = \frac{\omega}{k} \text{ est la célérité de l'onde} \\
   &= \frac{\omega}{2\pi\ c}\times\frac{E}{\nu}\text{ , où } \nu \text{ est la fréquence et } E \text{ est l'énergie} \\
   &= \frac{E}{c}.
   \end{aligned}$$

   On obtient bien une quantité liée à une quantité de mouvement.

5. Soit ψ une fonction d'onde.
   Alors, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\left[\hat{X}, \hat{P}\right] \mid \psi\rangle(x,t) &= -i\hbar\, x \frac{\partial \psi}{\partial x}(x,t) + i\hbar \left(\psi(x,t) + x\, \frac{\partial \psi}{\partial x}(x,t) \right) \\
&= i\hbar\, \psi(x,t) \\
&= \left(i\hbar\, \hat{\mathrm{id}} \right) \mid \psi\rangle(x,t).
\end{aligned}$$

   On obtient bien ce qu'il faut.

6. On ne peut comprendre l'opérateur $\hat{F}^2$ que comme la composée :

$$\hat{F}^2 = \hat{F} \circ \hat{F}.$$

   On détaille déjà le fait que la valeur moyenne de l'opérateur hermitien $\hat{F}$ est un nombre réel.
   En effet, si t est un réel, alors :

$$\left\langle \psi(t) \mid \hat{F} \mid \psi(t) \right\rangle = \overline{\left\langle \psi(t) \mid \hat{F} \mid \psi(t) \right\rangle},$$

   où les deux symboles « $\psi(t)$ » ont été interchangés dans la formule précédente. La moyenne est donc égale à son conjugué : c'est un nombre réel.

   Soit t un nombre réel. On en déduit en notant $m = \left\langle \hat{F}(t) \right\rangle$:

$$\begin{aligned}
\left\langle \left(\hat{F} - m\, \hat{\mathrm{id}} \right)^2 \right\rangle &= \left\langle \hat{F}^2 - 2m\, \hat{F} + m^2\, \hat{\mathrm{id}}^2 \right\rangle, \text{ car } \hat{F} \text{ et } m\, \hat{\mathrm{id}} \text{ commutent} \\
&= \left\langle \hat{F}^2 \right\rangle - 2m \left\langle \hat{F} \right\rangle + m^2 \left\langle \hat{\mathrm{id}} \right\rangle, \text{ par linéarité de la moyenne} \\
&= \left\langle \hat{F}^2 \right\rangle - 2m^2 + m^2, \text{ car } \left\langle \hat{\mathrm{id}} \right\rangle = 1 \\
&= \left\langle \hat{F}^2 \right\rangle - m^2.
\end{aligned}$$

   Or, comme l'opérateur $\hat{F}$ est hermitien et donc que la moyenne m est un nombre réel, on en déduit que l'opérateur $\hat{G} = \hat{F} - m\, \hat{\mathrm{id}}$ reste hermitien et :

$$\begin{aligned}
\left\langle \hat{G}^2(t) \right\rangle &= \int_{\mathbb{R}} \langle \psi \mid \hat{G} \mid \psi\rangle(x,t)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \langle \psi \mid \hat{G} \mid \hat{G} \mid \psi\rangle(x,t)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left| \hat{G} \mid \psi\rangle \right|^2 (x,t)\, dx \geqslant 0.
\end{aligned}$$

7. La quantité $\left\langle \hat{F}^2 \right\rangle - \left\langle \hat{F} \right\rangle^2$ s'apparente à une variance, donc à une dispersion des mesures autour de la moyenne. L'écart-type correspond donc à une erreur de mesure, ou du moins à l'incertitude sur la mesure.
8. On obtient par linéarité des opérateurs :

$$\begin{aligned}\left[\hat{Y}, \hat{Q}\right] &= \left[\hat{X} - \langle x \rangle\, \hat{\mathrm{id}}, \hat{P} - \langle p \rangle\, \hat{\mathrm{id}}\right] \\ &= \left[\hat{X}, \hat{P}\right] - \langle x \rangle \left[\hat{\mathrm{id}}, \hat{P}\right] - \langle p \rangle \left[\hat{X}, \hat{\mathrm{id}}\right] + \langle x \rangle \cdot \langle p \rangle \left[\hat{\mathrm{id}}, \hat{\mathrm{id}}\right].\end{aligned}$$

   Or, pour tout opérateur $\hat{F}$, on a :

$$\left[\hat{F}, \hat{\mathrm{id}}\right] = \left[\hat{\mathrm{id}}, \hat{F}\right] = \hat{0},$$

   car les opérateurs $\hat{F}$ et $\hat{\mathrm{id}}$ commutent.
   On en déduit qu'il ne reste que :

$$\left[\hat{Y}, \hat{Q}\right] = \left[\hat{X}, \hat{P}\right] = i\hbar\, \hat{\mathrm{id}}.$$

9. Par linéarité de la moyenne, on voit que :

$$\left\langle \hat{Y} \right\rangle = 0 \text{ et } \left\langle \hat{Q} \right\rangle = 0.$$

10. On rappelle qu'un opérateur $\hat{F}$ est hermitien si et seulement si pour toutes fonctions d'onde ψ_1 et ψ_2, alors :

$$\langle \psi_1 \mid \hat{F} \mid \psi_2 \rangle = \overline{\langle \psi_2 \mid \hat{F} \mid \psi_1 \rangle}.$$

   On fixe pour la suite deux fonctions d'onde ψ_1 et ψ_2 et un réel t.

   - Pour l'opérateur $\hat{X}$:

$$\begin{aligned}\langle \psi_1 \mid \hat{X} \mid \psi_2 \rangle(t) &= \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi_1(x,t)}\ x\ \psi_2(x,t)\ dx \\ &= \overline{\int_{\mathbb{R}} \overline{\psi_2(x,t)}\ x\ \psi_1(x,t)\ dx} \\ &= \overline{\langle \psi_2 \mid \hat{X} \mid \psi_1 \rangle(t)}.\end{aligned}$$

- Pour l'opérateur $\hat{P}$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle \psi_1 \mid \hat{P} \mid \psi_2 \rangle(t) &= \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi_1(x,t)}\ i\hbar\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x}(x,t)\ dx \\
&= i\hbar\ \left\{ \Big[\overline{\psi_1(x,t)}\ \psi_2(x,t) \Big]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \overline{\psi_1}}{\partial x}(x,t)\ \psi_2(x,t)\ dx \right\} \\
&= -i\hbar\ \int_R \overline{\frac{\partial \psi_1}{\partial x}(x,t)}\ \psi_2(x,t)\ dx\ ,\ \text{car} \lim_{x \longrightarrow \pm\infty} \psi_\ell(x,t) = 0 \\
&= \overline{\int_{\mathbb{R}} i\hbar\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x}(x,t)\ \overline{\psi_2(x,t)}\ dx} \\
&= \overline{\langle \psi_2 \mid \hat{P} \mid \psi_1 \rangle(t)}.
\end{aligned}$$

L'opérateur $\hat{\mathrm{id}}$ est hermitien par définition du produit hermitien. De plus, si λ est un nombre réel, l'opérateur $\lambda\ \hat{\mathrm{id}}$ reste hermitien car :

$$\begin{aligned}
\langle \psi_1 \mid \lambda\ \hat{\mathrm{id}} \mid \psi_2 \rangle(t) &= \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi_1(x,t)}\ \lambda\ \psi_2(x,t)\ dx \\
&= \lambda\ \langle \psi_1 \mid \psi_2 \rangle \\
&= \lambda\ \overline{\langle \psi_2 \mid \psi_1 \rangle} \\
&= \overline{\lambda\ \langle \psi_2 \mid \psi_1 \rangle} \\
&= \overline{\langle \psi_2 \mid \lambda\ \hat{\mathrm{id}} \mid \psi_1 \rangle(t)}.
\end{aligned}$$

Il apparaît alors que les opérateurs $\hat{Y}$ et $\hat{Q}$ sont hermitiens.

11. En développant $\hat{Y}^2$ et $\hat{Q}^2$ par le binôme de Newton, on obtient facilement :

$$\left\langle \hat{Y}^2 \right\rangle = (\Delta x)^2 \text{ et } \left\langle \hat{Q}^2 \right\rangle = (\Delta p)^2.$$

12. Soit λ dans $\mathbb{R}$. Alors, par linéarité des opérateurs et par linéarité de la moyenne :

$$\begin{aligned}
f(\lambda) &= \left\langle \hat{Y}^2 - i\lambda\ \hat{Q}\hat{Y} + i\lambda\ \hat{Y}\hat{Q} + \lambda^2\ \hat{Q}^2 \right\rangle \\
&= (\Delta p)^2\ \lambda^2 + i\lambda\ \left\langle \left[\hat{Y}, \hat{Q} \right] \right\rangle + (\Delta x)^2 \\
&= (\Delta p)^2\ \lambda^2 + i\lambda\ \left\langle i\hbar\ \hat{\mathrm{id}} \right\rangle + (\Delta x)^2 \\
&= (\Delta p)^2\ \lambda^2 - \hbar\ \lambda + (\Delta x)^2.
\end{aligned}$$

13. Soit λ dans $\mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{aligned}
f(\lambda) &= \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi(x,t)} \Big(\hat{Y} - i\lambda\ \hat{Q} \Big) \Big(\hat{Y} + i\lambda\ \hat{Q} \Big) \psi(x,t)\ dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \overline{\Big(\hat{Y} + i\lambda\ \hat{Q} \Big) \psi(x,t)}\ \Big(\hat{Y} + i\lambda\ \hat{Q} \Big) \psi(x,t)\ dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left| \Big(\hat{Y} + i\lambda\ \hat{Q} \Big) \psi(x,t) \right|^2\ dx \geqslant 0.
\end{aligned}$$

14. Supposons par l'absurde que l'incertitude Δp soit nulle. On en déduit que la fonction positive f est de la forme :

$$f : \lambda \longmapsto -\hbar \, \lambda + (\Delta x)^2$$

qui tend vers $-\infty$ lorsque λ tend vers $+\infty$, contredisant la positivité de la fonction f. Ceci montre que la quantité $(\Delta p)^2$ est strictement positive et donc que la fonction polynomiale f est de degré 2 en la variable λ.
Le discriminant associé à cette fonction polynomiale est négatif, compte tenu de la question précédente. On obtient alors l'inégalité :

$$\hbar^2 - 4(\Delta x)^2(\Delta p)^2 \leqslant 0,$$

donnant rapidement ce qu'il fait en utilisant la croissance de la racinée carrée sur $\mathbb{R}_+$.