Travaux dirigés sur la physique quantique

Problème : le principe d'incertitude de Heisenberg

On considère une particule quantique de masse m, évoluant dans $\mathbb{R}$. On note :

$$\psi : (x,t) \longmapsto \psi(x,t)$$

sa fonction d'onde associée.
Soit $\hat{F} : \psi \longmapsto \hat{F} \mid \psi\rangle$ un opérateur.
On définit la valeur moyenne de cet opérateur en l'instant t par la formule :

$$\langle \hat{F}(t)\rangle = \Big\langle \psi(t) \mid \hat{F} \mid \psi(t) \Big\rangle = \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi(x,t)}\ \hat{F} \mid \psi(x,t)\rangle\, dx.$$

1. Justifier la définition donnée lorsque l'opérateur est :

$$\hat{F} : \psi \longmapsto \Big((x,t) \longmapsto \zeta(x)\ \psi(x,t) \Big),$$

où $\zeta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction bornée.

2. Soit $\hat{F}$ un opérateur hermitien. On suppose qu'il existe une base orthonormée $\Big(|\psi_i\rangle \Big)_{i\in I}$ de vecteurs propres pour cet opérateur.
Justifier la valeur moyenne donnée pour l'opérateur $\hat{F}$.

On définit les opérateurs de position et d'impulsion par :

$$\hat{X} : \psi \longmapsto \Big((x,t) \longmapsto x\psi(x,t) \Big) \text{ et } \hat{P} : \psi \longmapsto \left((x,t) \longmapsto -i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x}(x,t) \right).$$

Pour tous opérateurs $\hat{F}$ et $\hat{G}$, on définit le commutateur :

$$\left[\hat{F}, \hat{G}\right] = \hat{F}\hat{G} - \hat{G}\hat{F}.$$

3. Justifier la terminologie d'« opération de position » pour l'opérateur $\hat{X}$.
4. On veut justifier la terminologie d'« opération d'impulsion » pour l'opérateur $\hat{P}$.
   (a) On considère une onde progressive associée à une fonction d'onde de la forme :

   $$\psi : (x,t) \longmapsto A\ e^{i(kx-\omega t)}.$$

   Montrer que cette fonction ψ est un vecteur propre pour l'opérateur $\hat{P}$.

(b) Montrer que la valeur propre associée est assimilable à une impulsion (analogue de la quantité de mouvement en mécanique classique).

5. Vérifier que :

$$\left[\hat{X}, \hat{P}\right] = i\hbar \, \hat{\mathrm{id}}.$$

6. Soit $\hat{F}$ un opérateur hermitien. Montrer que la quantité $\langle \hat{F}^2 \rangle - \langle \hat{F} \rangle^2$ est positive.
On se rappellera les formules de Huyghens relativement à la variance de variables aléatoires.

7. On définit $\Delta \hat{F}$, l'incertitude portant sur l'opérateur hermitien $\hat{F}$ par la formule :

$$\Delta \hat{F} = \sqrt{\langle \hat{F}^2 \rangle - \langle \hat{F} \rangle^2}.$$

Justifier cette définition d'incertitude.

On adopte dans la suite les notations suivantes :

- on note $\langle x \rangle = \langle \hat{X} \rangle$
- on note $\langle p \rangle = \langle \hat{P} \rangle$
- on note $\Delta x = \Delta \hat{X}$ et $\Delta p = \Delta \hat{P}$ les incertitudes respectives de position et d'impulsion.

On pose par ailleurs les opérateurs :

$$\hat{Y} = \hat{X} - \langle x \rangle \cdot \hat{\mathrm{id}} \text{ et } \hat{Q} = \hat{P} - \langle p \rangle \cdot \hat{\mathrm{id}}.$$

8. Calculer le commutateur $\left[\hat{Y}, \hat{Q}\right]$.
9. Calculer $\langle \hat{Y} \rangle$ et $\langle \hat{Q} \rangle$.
10. Montrer que les opérateurs $\hat{X}$ et $\hat{P}$ sont hermitiens. En déduire que les opérateurs $\hat{Y}$ et $\hat{Q}$ le sont aussi.
11. Exprimer $\langle \hat{Y}^2 \rangle$ et $\langle \hat{Q}^2 \rangle$ en fonction de Δx et Δp.
12. Montrer que l'application :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \lambda & \longmapsto & \left\langle \left(\hat{Y} - i\lambda \hat{Q}\right)\left(\hat{Y} + i\lambda \hat{Q}\right) \right\rangle \end{array} \right.$$

est une fonction polynomiale de la variable λ et exprimer cette fonction en fonction de Δx, de Δp et de $\hbar$.

13. Montrer que la fonction f ne prend que des valeurs réelles positives.
14. En déduire la relation d'incertitude de Heisenberg :

$$\Delta x \times \Delta p \geqslant \frac{\hbar}{2}.$$

En physique quantique, il est impossible de connaître à un instant t précisément la position et l'impulsion d'une particule quantique.