Travaux dirigés sur les probabilités – corrigé –

Exercice 1

1. Dans l'expérience ω proposée, le premier moment où apparaît pour la première fois deux « Pile » consécutifs est au $8^{ème}$ lancer :

$$\boxed{X(\omega) = 8.}$$

2. Il s'agit d'une application du lemme des coalitions. Les lancers sont mutuellement indépendants et chaque événement A_n ne dépend que des lancers numéros $2n$ et $2n+1$ et les ensembles $[\![2n, 2n+1]\!]$, lorsque n varie dans $\mathbb{N}^*$ sont deux à deux disjoints.
3. On montre plutôt que $\mathbb{P}(X = +\infty) = 0$.

   Soit N dans $\mathbb{N}^*$. L'événement $\left\{X = +\infty\right\}$ est inclus dans l'intersection :

$$\bigcap_{k=1}^{N} \overline{A_k}.$$

   Les événements A_n étant mutuellement indépendants, lorsque n décrit $\mathbb{N}^*$, il en est de même des événements contraires $\overline{A_n}$, lorsque n décrit $\mathbb{N}^*$.
   Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{N} \overline{A_k}\right) &= \prod_{k=1}^{N} \mathbb{P}\left(\overline{A_k}\right) \\ &= \prod_{k=1}^{N} (1-p^2) \\ &= (1-p^2)^N.\end{aligned}$$

   Ainsi,

$$\forall N \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \mathbb{P}(X = +\infty) \leqslant (1-p^2)^N.$$

   Il suffit maintenant de passer à la limite dans cet encadrement pour obtenir : $\mathbb{P}(X = +\infty) = 0$, car $|1-p^2| < 1$.

4. On obtient facilement les valeurs :

$$\boxed{a_0 = 0,\ a_1 = 0 \text{ et } a_2 = p^2.}$$

5. On utilise le système complet d'événements $\{F_1, P_1F_2, P_1P_2\}$.
Par la formule des probabilités totales, on peut écrire :

$$a_n = \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X = n, F_1) + \mathbb{P}(X = n, P_1F_2) + \mathbb{P}(X = n, P_1P_2).$$

Or, l'intersection $\{X = n\} \cap P_1P_2$ est vide car $P_1P_2 = \{X = 2\}$ et $n \geqslant 3$.
D'autre part, $\mathbb{P}(X = n, F_1) = \mathbb{P}(X = n \mid F_1) \times q$. La probabilité conditionnelle

$$\mathbb{P}(X = n \mid F_1)$$

vaut en fait $\mathbb{P}(X = n-1)$ car l'événement F_1 produit seulement un décalage d'une unité sur les indices et décale seulement d'une unité la première venue du « double Pile ».
Enfin, $\mathbb{P}(X = n, P_1F_2) = \mathbb{P}(X = n \mid P_1F_2) \times pq$. La probabilité conditionnelle

$$\mathbb{P}(X = n \mid P_1F_2)$$

vaut en fait $\mathbb{P}(X = n-2)$ car l'événement P_1F_2 produit seulement un décalage de deux unités sur les indices et décale seulement de deux unités la première venue du « double Pile ».
Conclusion :

$$\boxed{a_n = q \cdot a_{n-1} + pq \cdot a_{n-2}.}$$

6. Ce polynôme $P(X)$ correspond à la relation de récurrence linéaire trouvée précédemment...
Le discriminant vaut :

$$\Delta = q^2 + 4pq = q^2 + 4q - 4q^2 = 4q - 3q^2 > 0.$$

Les deux racines réelles sont :

$$\boxed{r_1 = \frac{q - \sqrt{4q - 3q^2}}{2} \text{ et } r_2 = \frac{q + \sqrt{4q - 3q^2}}{2}.}$$

7. Dès qu'un réel x appartient à $]-1, 1[$, alors au voisinage de $+\infty$:

$$n \cdot x^n = \circ\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

de série absolument convergente, donc de série convergente.
Il suffit de montrer que $|r_1| < 1$ et $|r_2| < 1$.

Il suffit de montrer que :

$$\frac{q+\sqrt{4q-3q^2}}{2} < 1 \text{ ou encore } \sqrt{4q-3q^2} < 2-q$$

ou encore, tout étant positif :

$$4q-3q^2 < (2-q)^2 \iff 4-8q+4q^2 > 0 \iff 4(1-q)^2 > 0$$

cette dernière inégalité stricte étant vraie.
Toutes les inégalités précédentes sont vraies et on a bien la convergence de la série.

8. Il s'agit de montrer que la série $\sum\limits_n n\cdot\mathbb{P}(X=n) = \sum\limits_n n\cdot a_n$ est absolument convergente.
   La suite (a_n) vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre deux donc il existe deux constantes λ et μ telles que :

$$\forall n \geqslant 1,\ a_n = \lambda\cdot r_1^n + \mu\cdot r_2^n.$$

   Or, $|r_1| \leqslant r_2 < 1$, donc au voisinage de $+\infty$ en la variable n, on a :

$$a_n = \mathscr{O}(r_2^n),$$

   et donc $n\cdot a_n = \mathscr{O}(n\cdot r_2^n)$, de série absolument convergente.

9. (a) Il ne faut pas oublier de mettre les valeurs absolues pour tester la sommabilité!!
   On fixe l'entier naturel n. La famille $(|x^n|)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est finie, donc sommable, de somme égale à :

$$\sigma_n = (n+1)\cdot|x|^n.$$

   On vient de voir que la série $\sum_n \sigma_n$ est absolument convergente car chaque terme σ_n est positif et :

$$\sigma_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\simeq} n\cdot|x|^n \text{ de série absolument convergente.}$$

   On pouvait aussi voir que :

$$\sigma_n = \circ\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

   directement.
   La famille proposée est donc sommable.

   (b) On peut donc effectuer la somme des termes de cette famille sommable que l'on note $\mathscr{F}$, dans n'importe quel sens.
   Si l'on fait des paquets à n constant, on obtient que la somme de la famille $\mathscr{F}$ vaut :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\cdot x^n.$$

Si l'on fait des paquets à k constant, on obtient cette nouvelle expression de la somme :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=k}^{+\infty} x^n &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{1-x} \\
&= \frac{1}{1-x}\sum_{k=0}^{+\infty} x^k \\
&= \frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1-x} \\
&= \boxed{\frac{1}{(1-x)^2}.}
\end{aligned}$$

10. On s'est placé dans le cas $p = \dfrac{1}{2} = q$.
La formule de la question **Q.5** devient :

$$\left\{\begin{array}{l}
a_0 = a_1 = 0 \\
a_2 = \dfrac{1}{4} \\
\forall n \geqslant 1,\ a_{n+2} = \dfrac{1}{2}a_{n+1} + \dfrac{1}{4}a_n
\end{array}\right. .$$

Le polynôme $P(X) = X^2 - \dfrac{1}{2}X - \dfrac{1}{4}$ admet pour racines :

$$r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{4} \text{ et } r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

Ainsi, en résolvant le système :

$$\left\{\begin{array}{l}
0 = \lambda \cdot r_1 + \mu \cdot r_2 \\
\dfrac{1}{4} = \lambda \cdot r_1^2 + \mu \cdot r_2^2
\end{array}\right.$$

on obtient le seul couple de solution (λ, μ) donné par :

$$\left\{\begin{array}{l}
\lambda = \dfrac{1}{4r_1(r_1 - r_2)} \\
\mu = \dfrac{1}{4r_2(r_2 - r_1)}
\end{array}\right. .$$

On termine par le calcul de l'espérance en elle-même :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n \cdot a_n \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n \cdot a_n \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n\Big(\lambda \cdot r_1^n + \mu \cdot r_2^n\Big) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\Big(\lambda \cdot r_1^2 \cdot r_1^n + \mu \cdot r_2^2 \cdot r_2^n\Big) + \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\lambda \cdot r_1^2 \cdot r_1^n + \mu \cdot r_2^2 \cdot r_2^n\Big) \\
&= \lambda \cdot r_1^2 \cdot \frac{1}{(1-r_1)^2} + \mu \cdot r_2^2 \cdot \frac{1}{(1-r_2)^2} + \lambda \cdot r_1^2 \cdot \frac{1}{1-r_1} + \mu \cdot r_2^2 \cdot \frac{1}{1-r_2} \\
&= -\frac{r_1}{4(r_2-r_1)(1-r_1)^2} + \frac{r_2}{4(r_2-r_1)(1-r_2)^2} + \frac{1}{4(r_2-r_1)}\left(-\frac{r_1}{r_1-r_2} + \frac{r_2}{r_1-r_2}\right) \\
&= \frac{1}{4(r_2-r_1)}\left[\left(-\frac{r_1}{(1-r_1)^2} + \frac{r_2}{(1-r_2)^2}\right) + \left(-\frac{r_1}{1-r_1} + \frac{r_2}{1-r_2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{4(r_2-r_1)}\left[\frac{r_2(1-r_1)^2 - r_1(1-r_2)^2}{(1-r_1)^2(1-r_2)^2} + \frac{r_2-r_1}{(1-r_1)(1-r_2)}\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{1-r_1r_2}{(1-r_1)^2(1-r_2)^2} + \frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)}\right]
\end{aligned}
$$

Or, on peut écrire le polynôme $P(X)$ sous plusieurs formes pour faire apparaître les relations coefficients/racines :

$$P(X) = X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{4} = (X-r_1)(X-r_2),$$

de sorte que $(1-r_1)(1-r_2) = P(1) = \dfrac{1}{4}$ et $r_1r_2 = -\dfrac{1}{4}$.

Conclusion,

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{4}\left[\left(1+\frac{1}{4}\right) \times 16 + 4\right] = 6.$$

On aurait aussi pu effectuer la sommation dans la formule :

$$\forall n \geqslant 3,\ n \cdot a_n = n \cdot \frac{a_{n-1}}{2} + n \cdot \frac{a_{n-2}}{4}$$

sachant que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n) = \mathbb{P}(X < +\infty) = 1.$$

En détaillant un peu, on obtient par sommation :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n \cdot a_n \\
&= 2 \cdot a_2 + \sum_{n=3}^{+\infty} n \cdot a_n \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{n=3}^{+\infty} \left(n \cdot \frac{a_{n-1}}{2} + n \cdot \frac{a_{n-2}}{4} \right) \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{n=3}^{+\infty} \left((n-1) \cdot \frac{a_{n-1}}{2} + (n-2) \cdot \frac{a_{n-2}}{4} + \frac{a_{n-1}}{2} + 2 \times \frac{a_{n-2}}{4} \right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathbb{E}(X) + \frac{1}{4}\mathbb{E}(X) + \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Conclusion, $\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) E(X) = \frac{3}{2}$ et on retrouve bien de manière peut-être un peu moins alambiquée que plus haut la valeur « tant espérée » de l'espérance $\mathbb{E}(X) = 6$.

Exercice 2

1. • Si la variable aléatoire X est presque sûrement nulle. Les variables X et 0 ont donc la même loi car pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $x \neq 0$, alors :

$$\mathbb{P}(X = x) = 0 = \mathbb{P}(0 = x)$$

et $\mathbb{P}(X = 0) = 1 = \mathbb{P}(0 = 0)$.
On en déduit que les variables X et 0 ont le même écart-type, qui vaut 0.

• Si $\sigma = 0$, alors comme la variable X est centrée, on en déduit :

$$0 = \sigma^2 = V(X) = \mathbb{E}(X^2).$$

On en déduit par la formule de transfert :

$$0 = \mathbb{E}(X^2) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^2 \cdot \mathbb{P}(X = x).$$

La somme ne comporte que des termes positifs. La somme étant nulle, chaque terme est nul. Ainsi,

$$\forall x \in X(\Omega) \setminus \{0\},\ x^2 \cdot \mathbb{P}(X = x) = 0, \text{ donc } \mathbb{P}(X = x) = 0.$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}\Big(X \neq 0\Big) = 0$$

et on a ce qu'il faut.

2. Soient $t \geqslant 0$ et $a \geqslant 0$ deux réels positifs ou nuls.
On vérifie facilement l'inégalité suivante portant sur les variables aléatoires :

$$e^{at} \cdot \mathbf{1}_{\{X \geqslant a\}} \leqslant e^{tX}.$$

En effet, soit ω dans Ω.
On distingue deux cas :
$\longrightarrow$ si $X(\omega) < a$, alors :

$$e^{at} \cdot \mathbf{1}_{\{X \geqslant a\}}(\omega) = 0 \leqslant e^{tX(\omega)} = e^{tX}(\omega).$$

$\longrightarrow$ si $X(\omega) \geqslant a$, alors :

$$\begin{aligned} e^{at} \cdot \mathbf{1}_{\{X \geqslant a\}}(\omega) &= e^{at} \\ &\leqslant e^{tX(\omega)} = e^{tX}(\omega). \end{aligned}$$

Il suffit alors de prendre l'espérance croissante, puis de multiplier le tout par $e^{-at} > 0$ pour obtenir cette inégalité de type « Markov ».

3. (a) La fonction φ est clairement continue sur le segment $[-1, 1]$. Le théorème des bornes atteintes fait le reste.

   (b) La fonction φ est dérivable sur $[-1, 1]$ et :

$$\forall u \in [-1, 1], \; \varphi'(u) = \Big(1 + 2u - (1 + u + u^2)\Big)e^{-u}$$

   du signe de $u - u^2 = u(1 - u)$, donc du signe de u.
   La fonction φ est décroissante sur $[-1, 0]$ et croissante sur $[0, 1]$. La valeur minimale m de la fonction φ est atteinte au point d'abscisse $u = 0$ et $\boxed{m = \varphi(0) = 1.}$

4. L'inégalité de convexité appliquée à la fonction convexe exp donne directement :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \; 1 + u \leqslant e^u.$$

Soit $t \in [0, 1]$.
En appliquant l'inégalité précédente à $u = \sigma^2 t^2$, on obtient l'inégalité de droite.
Ensuite, pour tout $\omega \in \Omega$, le réel $u = tX(\omega)$ appartient au segment $[-1, 1]$ et comme :

$$\forall u \in [-1, 1], \; \varphi(u) \geqslant 1, \text{ alors } e^u \leqslant 1 + u + u^2.$$

En appliquant cette inégalité à $u = tX(\omega)$, on en déduit :

$$e^{tX(\omega)} \leqslant 1 + tX(\omega) + t^2 X^2(\omega).$$

Par conséquent :

$$e^{tX} \leqslant 1 + tX + t^2 X^2.$$

Il suffit alors de prendre l'espérance croissante dans cette inégalité pour obtenir exactement l'inégalité de gauche.

5. Soit $\lambda \in [0, 2\sigma]$.
   Si $\sigma = 0$, alors $X = 0$ presque sûrement et $\lambda = 0$. L'inégalité demandée se résume à : $1 \leqslant 1$, qui est vraie.
   On se place dans le cas $\sigma > 0$.
   On applique la question **Q.2** au réel $a = \lambda\sigma \geqslant 0$. Pour tout $t \geqslant 0$, on obtient :
$$\mathbb{P}\Big(X \geqslant \lambda\sigma\Big) \leqslant e^{-\lambda\sigma t} e^{\sigma^2 t^2} = e^{-\lambda\sigma t + \sigma^2 t^2}.$$
   La fonction $f : t \longmapsto -\lambda\sigma t + \sigma^2 t^2$ est dérivable sur $[0, +\infty[$ de dérivée :
$$f' : t \longmapsto -\lambda\sigma + 2\sigma^2 t.$$
   La fonction f atteint une valeur minimale en $t = \dfrac{\lambda}{2\sigma} \in [0, 1]$.
   On en déduit en prenant cette valeur pour le réel t :
$$\mathbb{P}\Big(X \geqslant \lambda\sigma\Big) \leqslant e^{-\lambda\sigma t + \sigma^2 t^2} = \exp\left(-\frac{\lambda^2}{4}\right).$$

6. De nouveau, on distingue deux cas :
   $\longrightarrow$ si $\sigma = 0$, la variable X est presque sûrement nulle et l'inégalité à montrer devient :
$$1 \leqslant 2 \text{ , qui est vraie.}$$
   $\longrightarrow$ si $\sigma > 0$, soit $\lambda \in [0, 2\sigma]$. Si $\lambda = 0$, l'inégalité à montrer devient encore « $1 \leqslant 2$ », qui est vraie.
   On se place dans le cas où $\lambda > 0$ dans la suite.
   On en déduit que les événements $\Big\{X \geqslant \lambda\sigma\Big\}$ et $\Big\{X \leqslant -\lambda\sigma\Big\} = \Big\{-X \geqslant \lambda\sigma\Big\}$ sont disjoints, leur réunion formant $\Big\{|X| \geqslant \lambda\sigma\Big\}$.
   On peut alors utiliser la question précédente pour la variable X et également pour la variable aléatoire $Y = -X$, la variable Y étant centrée, à valeurs dans $[-1, 1]$ et d'écart-type valant encore σ.
   On obtient rapidement ce qu'il faut, par σ-additivité de la probabilité $\mathbb{P}$.

Exercice 3

Par linéarité de l'intégrale, en notant T l'indéterminée pour éviter la confusion avec la variable aléatoire X, pour tout polynôme :
$$P(T) = \sum_{k=0}^{d} a_k \cdot T^k \in \mathbb{R}[T],$$

en utilisant la linéarité de l'espérance, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(P(X)\Big) &= \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{d} a_k \cdot X^k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{d} a_k \cdot \mathbb{E}\left(X^k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{d} a_k \cdot \mathbb{E}\left(Y^k\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{d} a_k \cdot Y^k\right) \\
&= \mathbb{E}\Big(P(Y)\Big).
\end{aligned}$$

Les ensembles $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis, ainsi que leur réunion.
On pose l'ensemble :

$$X(\Omega) \cup Y(\Omega) = \Big\{u_1, \cdots, u_s\Big\},$$

les réels $u_1, \cdots, u_s$ étant tous différents, renvoyant aux valeurs prises par l'une au moins des variables aléatoires X ou Y.
On note $L_1(T), \cdots, L_s(T)$ les polynômes de Lagrange associés à ces s valeurs différentes :

$$\forall (i,j) \in [\![1, s]\!]^2,\ L_i(u_j) = \delta_{i,j}.$$

On fixe un entier i entre 1 et s.
On utilise finalement la formule de transfert :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(L_i(X)\Big) &= \sum_{k=1}^{s} L_i(u_k) \cdot \mathbb{P}(X = u_k) \\
&= \sum_{k=1}^{s} \delta_{i,k} \cdot \mathbb{P}(X = u_k) \\
&= \mathbb{P}(X = u_i).
\end{aligned}$$

De la même façon,

$$\mathbb{E}\Big(L_i(Y)\Big) = \mathbb{P}(Y = u_i).$$

Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

- si $x \in X(\Omega) \cup Y(\Omega)$, il existe un seul indice i entre 1 et s tel que $x = u_i$ et donc :

$$\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X = u_i) = \mathbb{P}(Y = u_i) = \mathbb{P}(Y = x).$$

- si $x \notin X(\Omega) \cup Y(\Omega)$, alors :

$$\mathbb{P}(X = x) = 0 = \mathbb{P}(Y = x).$$

Les variables X et Y ont bien la même loi.