Travaux dirigés sur les probabilités

Exercice 1

On fixe un réel $p \in]0,1[$.
On lance une infinité de fois de suite et de manière indépendante une pièce de monnaie donnant « Pile » avec une probabilité égale à p et donnant donc « Face » avec une probabilité égale à $q = 1 - p$.
On note X, la variable aléatoire donnant le numéro du lancer où l'on a eu deux fois « Pile » consécutivement pour la première fois. Si cet événement n'a pas lieu, on pose $X = +\infty$.
Dans la suite, on notera pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement P_k : « le $k^{ème}$ lancer a donné « Pile » » et $F_k = \overline{P_k}$.
On ne notera pas systématiquement les intersections dans les événements à venir.

1. Si $\omega = P_1F_2F_3F_4P_5F_6P_7P_8P_9F_{10}F_{11}\cdots$, que vaut $X(\omega)$?
2. Montrer que la famille d'événements $\mathscr{F} = \Big(A_n = P_{2n}P_{2n+1}\Big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille à événements mutuellement indépendants.
3. En déduire que $\mathbb{P}(X < +\infty) = 1$.

Dans la suite, on note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \mathbb{P}(X = n)$.

4. Calculer a_0, a_1 et a_2 en fonction éventuellement du paramètre p.
5. Soit $n \geqslant 3$ un entier. Établir une relation de récurrence entre a_n, a_{n-1} et a_{n-2}.
[indication : on pourra utiliser le système complet d'événements $\{F_1, P_1F_2, P_1P_2\}$.]
6. Déterminer les racines $r_1 \leqslant r_2$ du polynôme :
$$P(X) = X^2 - qX - pq.$$
7. Montrer que les séries $\displaystyle\sum_n n \cdot r_1^n$ et $\displaystyle\sum_n n \cdot r_2^n$ sont convergentes.

Dans toute la suite de l'exercice, on prend $p = \dfrac{1}{2}$.

8. Montrer que la variable X admet une espérance finie.
9. Soit $x \in]-1,1[$.
   (a) Montrer que la famille $\Big(x^n\Big)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est sommable.
   (b) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n$ est convergente et calculer sa somme.
10. Montrer que $\mathbb{E}(X) = 6$.

Exercice 2

Soit $X : \Omega \longrightarrow [-1,1]$, une variable aléatoire finie centrée et d'écart-type égal à σ.

1. Montrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes :
   - la variable aléatoire X est presque sûrement nulle
   - $\sigma = 0$.
2. Montrer que pour tous réels $t \geqslant 0$ et $a \geqslant 0$, on a :
$$\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant e^{-at} \cdot \mathbb{E}\Big(e^{tX}\Big).$$
3. On pose :
$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & (1+u+u^2)e^{-u} \end{array} \right. .$$
   (a) Montrer que la fonction φ atteint une valeur minimale m.
   (b) Calculer m.
4. En déduire que :
$$\forall t \in [0,1],\ \mathbb{E}\Big(e^{tX}\Big) \leqslant 1 + \sigma^2 t^2 \leqslant e^{\sigma^2 t^2}.$$
5. Montrer que :
$$\forall \lambda \in [0, 2\sigma],\ \mathbb{P}\Big(X \geqslant \lambda\sigma\Big) \leqslant \exp\left(-\frac{\lambda^2}{4}\right).$$
6. Montrer que :
$$\forall \lambda \in [0, 2\sigma],\ \mathbb{P}\Big(|X| \geqslant \lambda\sigma\Big) \leqslant 2\exp\left(-\frac{\lambda^2}{4}\right).$$

Exercice 3

Soient $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ deux variables aléatoires finies et définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$.
On suppose que :
$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}(X^k) = \mathbb{E}(Y^k).$$
Montrer que les variables X et Y ont la même loi.