

Travaux dirigés sur les polynômes - corrigé -

Exercice

1. On suppose que $P(X^n)$ est divisible par $X - 1$. Cela implique que le polynôme $Q(X) = P(X^n)$ admette 1 comme racine :

$$0 = Q(1) = P(1).$$

Le polynôme $P(X)$ admet aussi 1 comme racine, donc est factorisable par $(X - 1)$. On pose :

$$P(X) = (X - 1)S(X), \text{ pour un certain polynôme } S(X) \text{ dans } \mathbb{C}[X].$$

Il suffit maintenant de composer à droite par le polynôme X^n , ce qui donne :

$$P(X^n) = (X^n - 1)S(X^n)$$

amenant à la conclusion désirée.

2. (a) On suit l'indication de l'énoncé.

Le polynôme $Q(X) = (X + 1)P(X) - X$ est de degré $(n + 1)$ et admet comme racines au moins tous les éléments de $\llbracket 0, n \rrbracket$.

Cela donne $(n + 1)$ racines pour un polynôme de degré $(n + 1)$. On en déduit que le polynôme $X(X - 1) \cdots (X - n)$ divise le polynôme $Q(X)$ et ces deux polynômes ayant le même degré, il existe une constante $\alpha \in \mathbb{C}^*$ telle que :

$$Q(X) = \alpha \cdot X(X - 1) \cdots (X - n).$$

Ainsi,

$$(X + 1)P(X) - X = \alpha \cdot X(X - 1) \cdots (X - n).$$

L'évaluation en (-1) dans cette dernière égalité donne :

$$1 = \alpha \cdot \prod_{i=1}^{n+1} (-i) = \alpha \cdot (-1)^{n+1} \times (n + 1)!$$

et donc :

$$(X + 1)P(X) - X = \frac{(-1)^{n+1}}{(n + 1)!} \cdot X(X - 1) \cdots (X - n).$$

Il suffit maintenant d'évaluer cette dernière égalité en $(n+1)$, ce qui donne :

$$(n+2)P(n+1) - (n+1) = (-1)^{n+1},$$

donc
$$P(n+2) = \frac{(n+1) + (-1)^{n+1}}{n+2}.$$

On aurait pu également utiliser les polynômes de Lagrange $L_0, \dots, L_n$ associés aux nombres entiers différents $0, \dots, n$ de sorte que :

$$P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{k}{k+1} \cdot L_k(X) \quad [\text{égalité } \star]$$

Connaissant exactement l'expression de ces polynômes de Lagrange :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, L_k(X) = \prod_{\ell=0; \ell \neq k}^n \frac{X - \ell}{k - \ell},$$

on peut finalement procéder à l'évaluation en $(n+1)$ dans l'égalité $\star$ pour obtenir après simplifications le même résultat.

(b) On procède de même pour cette question.

Le polynôme $R(X) = X^2 P(X) - 1$ est de degré $(n+2)$ et admet comme racines au moins les nombres $1, \dots, n+1$. Le polynôme $(X-1) \cdots (X-n-1)$ de degré $(n+1)$ divise le polynôme $R(X)$ de degré $(n+2)$. Il existe β dans $\mathbb{C}^*$ et un polynôme unitaire de degré 1 de la forme $(X-\lambda)$ tels que :

$$R(X) = \beta \cdot (X-1) \cdots (X-n-1) \times (X-\lambda).$$

Le coefficient dominant dans $P(X)$ est le même que celui dans $R(X)$ et ce coefficient dominant est égal à β .

Il suffit maintenant d'évaluer l'égalité entre polynômes en 0 pour obtenir :

$$-1 = R(0) = \beta \cdot (-1)^{n+2} \times (n+1)! \times \lambda.$$

Pour obtenir une autre relation permettant d'obtenir le coefficient β , on remarque que le coefficient en X dans le polynôme $R(X)$ est nul, amenant le fait, par les relations coefficients/racines qu'en notant $z_1, \dots, z_{n+2}$ les racines complexes du polynôme $R(X)$:

$$0 = \beta \cdot \sigma_{n+1}(z_1, \dots, z_{n+2}).$$

Or, sachant qu'aucune racine z_k n'est nulle puisque $R(0) = -1 \neq 0$, on dispose de la formule :

$$\sigma_{n+1}(z_1, \dots, z_{n+2}) = \left(\sum_{k=1}^{n+2} \frac{1}{z_k} \right) \times \sigma_{n+2}(z_1, \dots, z_{n+2}).$$

On sait que :

$$R(0) = -1 = \beta \cdot (-1)^{n+2} \cdot \sigma_{n+2}(z_1, \dots, z_{n+2}).$$

On obtient en définitive :

$$\sigma_{n+2}(z_1, \dots, z_{n+2}) = \frac{(-1)^{n+1}}{\beta} \neq 0$$

et donc :

$$\sum_{k=1}^{n+2} \frac{1}{z_k} = 0 \text{ ou encore } \frac{1}{\lambda} = - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}.$$

Conclusion, comme $\beta = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)! \cdot \lambda}$, on obtient la formule attendue :

$$\beta = \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \times \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}.$$

Là encore, on aurait pu utiliser les polynômes de Lagrange associés aux réels tous différents $1, \dots, n+1$, pour obtenir l'expression du polynôme $P(X)$:

$$P(X) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} \cdot L_k(X).$$

Le coefficient dominant dans le polynôme $P(X)$ est le coefficient en X^n et pour tout $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, le terme en X^n dans $L_k(X)$ vaut :

$$\prod_{\ell=1; \ell \neq k} \frac{1}{k-\ell} = \frac{(-1)^{n+1-k}}{(k-1)!(n+1-k)!}.$$

On terminerait le calcul en utilisant : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k} = \int_0^1 x^{k-1} dx$ puis une intégrale d'une somme géométrique de raison $(-x)$, pour $x \in [0, 1]$...

(c) Cette fois-ci, on n'échappe pas aux polynômes de Lagrange.

Chacun des deux polynômes des deux questions précédentes est une somme finie de termes de la forme :

$$r \cdot L(X),$$

où r est un nombre rationnel et $L(X)$ est un polynôme de Lagrange clairement à coefficients rationnels. La somme finie est donc dans $\mathbb{Q}[X]$.

3. On reconnaît la factorisation :

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) \right),$$

donc :

$$\frac{X^n - 1}{X - 1} = \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) \right).$$

Or, $\frac{X^n - 1}{X - 1} = 1 + X + \dots + X^{n-1}$. L'évaluation en 1 donne :

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \exp \left(\frac{2ik\pi}{n} \right) \right) = n.$$

On aurait pu partir aussi de la factorisation de $X^n - 1$ puis dériver et évaluer le tout en 1.

Or, par l'angle moitié,

$$\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, 1 - \exp \left(\frac{2ik\pi}{n} \right) = -2i \exp \left(\frac{ik\pi}{n} \right) \times \sin \left(\frac{k\pi}{n} \right).$$

On en déduit que le produit des sinus à calculer – produit que l'on note A – vaut :

$$\begin{aligned} A &= \frac{n}{(-2i)^{n-1}} \times \prod_{k=1}^{n-1} \exp \left(-\frac{ik\pi}{n} \right) \\ &= \frac{n}{(-2i)^{n-1}} \times \exp \left(-i\frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k \right) \\ &= \frac{n}{(-2i)^{n-1}} \times \exp \left(-i\frac{\pi(n-1)}{2} \right) \\ &= \frac{n}{(-2i)^{n-1}} \times (-i)^{n-1} \\ &= \frac{n}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Problème : suites de Sturm

1. Le polynôme $R(X) = Q(X + \lambda)$ admet 0 comme racine. On pose $R(X) = X^m S(X)$, avec $m \in \mathbb{N}^*$ et $S(0) \neq 0$, l'entier m étant la multiplicité de la racine 0 dans le polynôme non nul $R(X)$. On sait que 0 est une racine de $R'(X)$ de multiplicité égale à $m-1$. On pose :

$$R'(X) = X^{m-1} T(X), \text{ avec } T(X) = mS(X) + XS'(X).$$

On en déduit :

$$R(X)R'(X) = X^{2m-1} S(X)T(X).$$

La fonction polynomiale $\varphi = (ST)(\cdot)$ est continue et :

$$\varphi(0) = mS^2(0) > 0.$$

Par continuité, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall h \in]-\alpha, \alpha[, \varphi(h) > 0.$$

On en déduit que pour tout réel h dans $] -\alpha, \alpha[\setminus \{0\}$, alors la quantité $R'(h)R(h)$ est non nulle et du même signe que h^{2m-1} , donc du même signe que h , l'exposant $2m-1$ étant un entier naturel impair.

2. Chaque polynôme $P^{(k)}$ pour k variant dans $\llbracket 0, n \rrbracket$ est non nul car de degré $n - k$: ce polynôme admet un nombre fini de racines réelles et la réunion de ces n ensembles de racines redonne un ensemble fini.
3. Pour tout entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, la fonction polynomiale $\psi_k : t \mapsto P^{(k)}(t)$ est continue sur $]a, b[$ et ne s'annule pas. Par corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, la fonction ψ_k garde un signe constant strict. On en déduit que si $x < y$ sont deux réels dans $]a, b[$, alors les séquences $\left(P^{(k)}(x)\right)_{0 \leq k \leq n}$ et $\left(P^{(k)}(y)\right)_{0 \leq k \leq n}$ ne comportent pas le réel nul et comportent composantes par composantes des réels de mêmes signes. Le nombre de changements de signes stricts pour l'une est le même que le nombre de changements de signes stricts pour l'autre : $V(x) = V(y)$ et la fonction V est bien constante sur $]a, b[$.
4. On note :

$$\mathcal{D} = \left\{ i \in \llbracket 0, n \rrbracket \mid P^{(i)}(a) = 0 \right\}.$$

On peut partitionner l'ensemble $\mathcal{D}$ en segments discrets $I_1, \dots, I_s$ de la forme :

$$I_j = \llbracket a_j, b_j \rrbracket$$

avec pour tout $j \in \llbracket 1, s \rrbracket$, $a_j \leq b_j$, $(a_j, b_j) \in \mathcal{D}^2$ et pour tout $j \in \llbracket 1, s \rrbracket$, $b_j + 1 \notin \mathcal{D}$ et finalement :

$$\mathcal{D} = \bigsqcup_{j=1}^s I_j.$$

Par hypothèse sur le réel a , le nombre a est racine de multiplicité m dans le polynôme $P^{(k)}(X)$. Cela implique que l'on a l'inclusion :

$$\llbracket k, k + m - 1 \rrbracket \subset \mathcal{D} \text{ et } k + m \notin \mathcal{D}.$$

L'un des segments discrets I_j – que l'on note I_{j_0} – contient donc le segment discret $\llbracket k, k + m - 1 \rrbracket$. La longueur (le cardinal) de ce dernier segment discret est égal à m . On en déduit que la longueur $\ell(I_{j_0})$ du segment discret I_{j_0} est supérieure ou égale à m .

On remarque de plus que le polynôme $P^{(n)}(X)$ est constant non nul. L'entier n ne peut appartenir à l'ensemble $\mathcal{D}$.

Soit $I_j = \llbracket a_j, b_j \rrbracket$, l'un des segments discrets présent dans la partition de l'ensemble $\mathcal{D}$. Soit i un entier dans I_j . On peut appliquer la première question au polynôme $Q(X) = P^{(i)}(X)$ de sorte que le nombre a est une racine du polynôme $Q(X)$. Pour tout réel $h > 0$ suffisamment petit, la quantité $Q(a + h) \cdot Q'(a + h)$ est strictement positive alors que la quantité $Q(a - h) \cdot Q'(a - h)$ est strictement négative. On remarque donc un changement de signes strict entre $P^{(i)}(a - h)$ et $P^{(i+1)}(a - h)$ et aucun changement de signe entre $P^{(i)}(a + h)$ et $P^{(i+1)}(a + h)$.

En considérant les éléments du segment I_j , on observe $\ell(I_j)$ changements de signes supplémentaires en $(a - h)$ par rapport à $(a + h)$.

Si i est maintenant un entier entre 0 et $n - 1$ tel que les entiers i et $i + 1$ n'appartiennent pas à $\mathcal{D}$, alors la quantité $P^{(i)}(a) \cdot P^{(i+1)}(a)$ est non nulle et par continuité de l'application polynomiale $t \mapsto P^{(i)}(t) \cdot P^{(i+1)}(t)$, localement en a , le nombre de

changements de signes stricts entre $P^{(i)}(t)$ et $P^{(i+1)}(t)$ ne varie pas en fonction de t . Cela n'occasionne pas de différence pour les changements de signes stricts en $a + h$ et $a - h$ pour cet indice i .

Examinons finalement la situation en un entier i tel que $i \notin \mathcal{D}$ et $i + 1 \in \mathcal{D}$. On ne peut rien dire en général quant à un changement de signe strict éventuel entre $P^{(i)}(a - h)$ et $P^{(i+1)}(a - h)$ d'une part et entre $P^{(i)}(a + h)$ et $P^{(i+1)}(a + h)$ d'autre part. La différence entre des deux nombres de changements de signes stricts est supérieure ou égale à -1 . Conclusion, pour tout $h > 0$ suffisamment petit, on peut écrire :

$$V(a - h) - V(a + h) \geq \left(\sum_{j=1}^s \ell(I_j) \right) + s,$$

le terme s faisant référence aux couples d'indices $(i, i + 1)$ avec $0 \leq i < i + 1 \leq n$ tels que $i \notin \mathcal{D}$ et $i + 1 \in \mathcal{D}$.

Pour tout $j \in \llbracket 1, s \rrbracket \setminus \{j_0\}$, on sait que $\ell(I_j) = b_j - a_j + 1 \geq 1$.

Comme le segment I_{j_0} contient l'ensemble $\llbracket k, k + m - 1 \rrbracket$, alors : $\ell(I_{j_0}) \geq m$.

On en déduit que pour $h > 0$ assez petit,

$$V(a - h) - V(a + h) \geq m - 1.$$

5. Pour h non nul et proche de 0, on obtient les quadruplets :

$$\left(P(h), P'(h), P''(h), P^{(3)}(h) \right) = \left(1 + o(1), -1 + o(h), 6h, 6 \right).$$

Pour $h > 0$ suffisamment petit, on obtient $V(a - h) = 2$ et pour $h > 0$ suffisamment petit, on obtient $V(a + h) = 2$. L'inégalité de la question **Q.4** est ici une égalité.

6. L'ajout de l'hypothèse $P(a) = 0$ montre que l'un des segments discrets contient en réalité 0. Pour ce segment $I_{j_1} = \llbracket 0, b_{j_1} \rrbracket$, il n'existe pas d'entiers i tels que $i \notin \mathcal{D}$ et $i + 1 \in I_{j_1}$. Il n'y a pas lieu de rajouter le terme (-1) dans la somme minorant $V(a - h) - V(a + h)$, pour $h > 0$ petit et on obtient ce qu'il faut.
7. Soit Q un polynôme admettant a comme racine de multiplicité égale à m . La séquence $\left(Q(a), Q'(a), \dots, Q^{(m)}(a) \right)$ est nulle sauf pour le dernier terme. On pose :

$$Q(X + a) = X^m \cdot S(X), \text{ avec } S(a) \neq 0.$$

Si i est un entier entre 0 et m , alors à l'aide de la formule de Leibniz,

$$\begin{aligned} \left(Q(X + a) \right)^{(i)} &= \sum_{p=0}^i \binom{i}{p} \frac{m!}{(m-p)!} X^{m-p} S^{(i-p)}(X) \\ &= X^{m-i} \left(\sum_{p=0}^i \binom{i}{p} \frac{m!}{(m-p)!} X^{i-p} S^{(i-p)}(X) \right). \end{aligned}$$

L'évaluation en 0 du polynôme entre parenthèses vaut $\frac{m!}{(m-i)!} S(0)$, du signe de $S(0)$.

Il n'y a pas de changements de signes pour la séquence

$$(Q(a+h), Q'(a+h), \dots, Q^{(m)}(a+h)),$$

pour $h > 0$ suffisamment petit.

De plus, pour $h > 0$ suffisamment petit, les quantités $Q^{(m)}(a)$ et $Q^{(m)}(a+h)$ sont de même signe, celui de $S(0)$.

En refaisant cela sur tous les segments d'indices i tels que $Q^{(i)}(a) = 0$, on n'observe aucune différence du nombre de changements stricts de signes entre les abscisses a et $a+h$.

Il suffit maintenant d'appliquer ce qui précède aux polynômes $P^{(i)}(X+a)$.

8. Les valeurs $V(\alpha)$ et $V(\beta)$ correspondent à des valeurs prises par la fonction $V(\cdot)$ sur des plateaux.

On note $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les racines de $P(X)$ situées entre α et β , les multiplicités respectives étant notées $m_1, \dots, m_r$.

La question **Q.4** montre que dès que l'on traverse un élément a de Λ , la valeur $V(a^-)$ est supérieure ou égale à la valeur $V(a^+)$. Les valeurs par plateaux de la fonction $V(\cdot)$ sont en décroissance.

De plus, par la question **Q.6**, dès que l'on traverse une racine λ_i , la valeur $V(\lambda_i^-)$ est supérieure ou égale à $V(\lambda_i^+) + m_i$.

On en déduit :

$$V(\alpha) \geq V(\beta) + \sum_{i=1}^r m_i.$$

C'est l'inégalité escomptée.

9. On note m , la multiplicité de la racine 0 dans le polynôme $P(X)$. On pose le polynôme :

$$Q(X) = \frac{P(X)}{X^m},$$

qui n'admet pas 0 comme racine.

En notant $u = (a_0, \dots, a_n)$ la suite des coefficients du polynôme $P(X)$, la suite des coefficients du polynôme $Q(X)$ est égale à :

$$v = (a_m, \dots, a_n).$$

Le nombre de changements de signes stricts pour les suites u ou v sont identiques. Les racines strictement positives du polynôme $P(X)$ sont exactement les mêmes, comptées avec multiplicités, que dans le polynôme $Q(X)$.

Il suffit donc de montrer le résultat pour le polynôme $Q(X)$, le polynôme $Q(X)$ n'admettant pas 0 comme racine.

L'ensemble des racines positives du polynôme $Q(X)$ appartiennent à un segment de la forme $[0, \beta]$, avec β suffisamment grand pour que $Q(\beta) \neq 0$. On applique la question **Q.8** au polynôme $Q(X)$.

Le nombre N de racines positives comptées avec multiplicités dans le polynôme $Q(X)$ est majoré par :

$$V(0) - V(\beta) \leq V(0).$$

Or, $V(0)$ correspond exactement au nombre de changements de signes stricts des coefficients de $Q(X)$ car :

$$\forall i \in \llbracket 0, n - m \rrbracket, Q^{(i)}(0) = i! \cdot a_{m+i} \text{ du signe de } a_{m+i}.$$

10. On note s , le nombre de coefficients a_i non nuls dans le polynôme $P(X)$. Le polynôme $P(X)$ admet donc au moins s racines réelles strictement positives différentes.

Ce nombre de racines est inférieur au nombre de changements de signes stricts de la séquence $(a_0, a_1, \dots, a_n)$. En notant $i_1 < i_2 < \dots < i_s = n$ les indices correspondant aux coefficients non nuls, le nombre de changements de signes stricts de $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ est le nombre de changements de signes stricts de $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_s})$.

On peut facilement montrer par récurrence sur l'entier r l'assertion suivante :

$\mathcal{P}(r)$: « si $(b_1, \dots, b_r)$ est un r -uplet de réels non nuls, le nombre de changements de signes stricts est inférieur ou égal à $r - 1$ »

On obtient alors l'inégalité $s \leq s - 1$, ce qui aboutit à une contradiction.
