Travaux dirigés sur les polynômes

Exercice

Les questions sont indépendantes.

1. Soient $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
   Montrer que si $P(X^n)$ est divisible par $X-1$, alors il est aussi divisible par $X^n - 1$.
2. Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n.
   (a) On suppose que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P(k) = \dfrac{k}{k+1}$.
   En examinant le polynôme $(X+1)P(X) - X$, calculer $P(n+1)$.
   (b) On suppose que pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$, $P(k) = \dfrac{1}{k^2}$.
   Calculer le coefficient dominant dans le polynôme $P(X)$, en fonction de la somme harmonique.
   (c) Montrer que les deux polynômes intervenant dans les deux questions précédentes sont à coefficients rationnels.
3. Simplifier $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)\right)$ et en déduire la formule :

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Problème : suites de Sturm

On considère un polynôme $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot X^k$ de degré $n \in \mathbb{N}$ et à coefficients réels.

1. Soient $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non nul et λ une racine réelle du polynôme $Q(X)$.
   Montrer que pour tout réel h non nul et assez petit, la quantité $Q(\lambda + h)Q'(\lambda + h)$ est non nulle et du même signe que h.

Pour tout réel x, on note $V(x)$ le nombre de changements de signes stricts dans la séquence $\left(P^{(k)}(x)\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$. Autrement dit, le nombre $V(x)$ est le cardinal de l'ensemble :

$$\left\{(i,j) \in [\![0,n]\!]^2 \mid i < j,\ P^{(i)}(x) \cdot P^{(j)}(x) < 0 \text{ et } \forall k \in \mathbb{N},\ i < k < j \Longrightarrow P^{(k)}(x) = 0\right\}.$$

On définit ainsi une fonction $V : x \longmapsto V(x)$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{N}$.
On note Λ l'ensemble des racines réelles des polynômes $P^{(k)}(X)$, lorsque k décrit $[\![0, n]\!]$.

2. Montrer que l'ensemble Λ est fini.
3. Soient $a < b$ deux éléments consécutifs éventuels dans l'ensemble Λ. Montrer que la fonction V est constante sur l'intervalle $]a, b[$.
4. Soit $a \in \Lambda$. Il existe $k \in [\![0, n]\!]$ tel que a soit une racine réelle du polynôme $P^{(k)}(X)$. On note m la multiplicité de la racine a dans ce polynôme. Montrer que :

$$\lim_{x \longrightarrow a^-} V(x) - \lim_{x \longrightarrow a^+} V(x) \geqslant m - 1.$$

[indication : on pourra partitionner l'ensemble $\mathscr{D} = \left\{ i \in [\![0, n]\!] \mid P^{(i)}(a) = 0 \right\}$ en segments discrets et remarquer que l'entier n n'appartient pas à l'ensemble $\mathscr{D}$.]

5. Effectuer l'application numérique pour le polynôme $P(X) = 1 - X + X^3$ au point $a = 0$.
6. En reprenant les hypothèses de la question **Q.4**, montrer que si de plus $P(a) = 0$, alors :

$$\lim_{x \longrightarrow a^-} V(x) - \lim_{x \longrightarrow a^+} V(x) \geqslant m.$$

7. En reprenant les hypothèses de la question précédente **Q.6**, en rappelant que $P(a) = 0$, montrer que :

$$\lim_{x \longrightarrow a^+} V(x) = V(a).$$

8. Soient $\alpha < \beta$ deux réels qui ne sont pas racines du polynôme $P(X)$. En déduire que le nombre de racines comptées avec multiplicités de $P(X)$ dans $[\alpha, \beta]$ est majoré par $V(\alpha) - V(\beta)$.
9. Montrer que le nombre de racines réelles strictement positives ou nulles comptées avec multiplicités de $P(X)$ est majoré par le nombre de changements de signes stricts dans la suite des coefficients de $P(X)$.
10. On suppose que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on a l'implication :

$$a_i \neq 0 \Longrightarrow P(e^i) = 0.$$

Montrer que P est le polynôme nul.