Travaux dirigés sur les intégrales

Problème : le principe du maximum

Partie I : inégalité et égalité triangulaire

Dans cette partie, on considère une fonction continue $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$.

1. Justifier brièvement l'inégalité triangulaire :

$$\left|\int_0^1 f(t)\ dt\right| \leqslant \int_0^1 |f(t)|\ dt.$$

Dans la suite, on suppose que l'on a égalité dans cette inégalité triangulaire. Autrement dit, on suppose que :

$$\left|\int_0^1 f(t)\ dt\right| = \int_0^1 |f(t)|\ dt.$$

On veut montrer dans la suite de cette partie qu'il existe une constante $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall t \in [0,1],\ \ f(t) = |f(t)| \cdot e^{i\alpha}.$$

On met le complexe $I = \displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt$ sous forme exponentielle :

$$I = A \cdot e^{i\varphi}, \text{ avec } A \geqslant 0 \text{ et } \varphi \in \mathbb{R}.$$

2. On suppose dans cette question que $A = 0$. Répondre alors au problème posé précédemment.

On se place maintenant dans le cas où $A > 0$. On pose la fonction :

$$g : t \longmapsto f(t) \cdot e^{-i\varphi}.$$

On pose les fonctions $x : t \longmapsto \Re e\Big(g(t)\Big)$ et $y : t \longmapsto \Im m\Big(g(t)\Big)$.

3. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}\ dt = \int_0^1 x(t)\ dt.$
4. En déduire que la fonction $y(\cdot)$ est nulle et que la fonction $x(\cdot)$ est positive sur $[0,1]$.
5. Répondre au problème posé pour la fonction f en début de partie.

Partie II : formule de Cauchy

On considère dans cette partie un polynôme $P(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot X^n$ à coefficients complexes.

6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la formule :

$$a_n = \int_0^1 P(e^{2i\pi t}) \cdot e^{-2in\pi t}\, dt.$$

7. ***application***

   On suppose que pour tout $z \in \mathbb{U}$, alors $P(z) \in \mathbb{U}$. Le polynôme $P(X)$ ne peut être nul. On note v, sa valuation et d son degré. On suppose que $v < d$. On note $n = d - v$.

   (a) Calculer $K = \displaystyle\int_0^1 P(e^{2i\pi t}) \cdot \overline{P}(e^{-2i\pi t}) \cdot e^{-2in\pi t}\, dt$.

   (b) Montrer que l'intégrale K précédente vaut également :

$$K = a_d \cdot \overline{a_v}.$$

   (c) En déduire une contradiction.

   (d) Déterminer tous les polynômes $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ tels que :

$$\mathbb{P}(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}.$$

Partie III : principe du maximum

On considère dans cette partie un polynôme $P(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot X^n$ à coefficients complexes.

8. Soit D un disque fermé de centre 0 et de rayon $r > 0$. Justifier que la fonction

$$\psi : \left| \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \longmapsto & |P(z)| \end{array} \right.$$

   atteint une valeur maximale.

On suppose qu'il existe $r > 0$ tel qu'en posant D le disque fermé de centre 0 et de rayon r, on ait :

$$\psi(0) = \max_{z \in D} \psi(z).$$

9. Montrer que la fonction $f : t \longmapsto P(re^{2i\pi t})$ vérifie :

$$\int_0^1 |f(t)|\, dt = \left| \int_0^1 f(t)\, dt \right|.$$

10. On sait alors qu'il existe α dans $\mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in [0,1],\ \ f(t) = |f(t)| \cdot e^{i\alpha}.$$

   Montrer que :

$$\forall t \in [0,1],\ \ f(t) = |a_0| \cdot e^{i\alpha}.$$

11. Montrer que le polynôme $P(X)$ est constant.
12. Montrer le principe du maximum :

    « Soient $P(X)$ un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$ et $D = D(\omega, r)$ un disque fermé de centre ω et de rayon $r > 0$.
    Si la fonction $z \longmapsto |P(z)|$ définie de D vers $\mathbb{R}$ atteint son maximum en un point $z_0 \in D$ tel que $|z_0 - \omega| < r$, alors le polynôme $P(X)$ est constant. »