

# Travaux dirigés sur les groupes - corrigé -

## Problème : actions de groupes

### Partie I : quelques exemples

#### 1. action du groupe symétrique

(a) On vérifie facilement que si  $k \in X$  et si  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont dans  $S_n$ , alors :

$$\sigma_1 \circ \sigma_2(k) = \sigma_1(\sigma_2(k)) \text{ et } \text{id}_X(k) = k.$$

(b) On montre que  $\mathcal{O}(k) = X$ .

En effet, l'inclusion directe est évidente.

Soit maintenant  $\ell \in X$ . Si  $\ell = k$ , alors  $\ell = \text{id}_X \cdot k \in \mathcal{O}(k)$  et si  $\ell \neq k$ , en notant  $\sigma = (k, \ell)$  la permutation échangeant  $k$  et  $\ell$ , alors  $\sigma \cdot k = \ell \in \mathcal{O}(k)$ .

(c) Il est facile de voir que :

$$\text{Stab}(k) = \left\{ \sigma \in S_n \mid \sigma(k) = k \right\}.$$

L'application :

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \text{Stab}(k) & \longrightarrow & S_{X \setminus \{k\}} \\ \sigma & \longmapsto & \sigma|_{X \setminus \{k\}} \end{array}$$

est une bijection d'application réciproque :

$$\Psi : \begin{array}{ccc} S_{X \setminus \{k\}} & \longrightarrow & \text{Stab}(k) \\ \rho & \longmapsto & \rho : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X \\ \ell & \longmapsto & \begin{cases} \sigma(\ell), & \text{si } \ell \in X \setminus \{k\} \\ k, & \text{si } \ell = k \end{cases} \end{array} \end{array}.$$

On en déduit :

$$|\text{Stab}(k)| = |S_{X \setminus \{k\}}| = (n-1)!.$$

2. *action du groupe sur lui-même par translation*

(a) Il est facile de voir que pour tous  $g_1$  et  $g_2$  dans  $G$  et pour tout  $x \in G$ ,

$$g_1 \star (g_2 \star x) = (g_1 \star g_2) \star x \text{ et } e \star x = x.$$

(b) On montre que  $\mathcal{O}(x) = G$ .

L'inclusion directe est évidente.

Réciproquement, soit  $y \in G$ . En posant :

$$g = y \star x^{-1}, \text{ alors } g \cdot x = y \in \mathcal{O}(x).$$

3. *action du groupe sur lui-même par conjugaison*

Il est facile de voir que pour tous  $g_1$  et  $g_2$  dans  $G$  et pour tout  $x \in G$ , alors :

$$(g_1 \star g_2) \star x \star (g_1 \star g_2)^{-1} = g_1 \star (g_2 \star x \star g_2^{-1}) \star g_1^{-1}$$

$$\text{et : } e \star x \star e^{-1} = x.$$

*Partie II : quelques propriétés générales*

4. On vérifie que :

→ le stabilisateur  $\text{Stab}(x)$  est inclus dans  $G$ , qui est un groupe pour  $\star$

→  $e \cdot x = x$ , donc  $e \in \text{Stab}(x)$

→ pour tous  $g$  et  $h$  dans  $\text{Stab}(x)$ , on a :

$$\begin{aligned} (g_1 \star g_2^{-1}) \cdot x &= g_1 \cdot (g_2^{-1} \cdot x) \\ &= g_1 \cdot (g_2^{-1} \cdot (g_2 \cdot x)) \\ &= g_1 \cdot ((g_2^{-1} \star g_2) \cdot x) \\ &= g_1 \cdot (e \cdot x) \\ &= g_1 \cdot x = x. \end{aligned}$$

On en déduit que  $g_1 \star g_2^{-1} \in \text{Stab}(x)$ .

5. (a) • La relation est réflexive en prenant  $g = e$ .

• La relation est symétrique que si  $x \mathcal{R} y$ , on écrit  $x = g \cdot y$ , pour un certain élément  $g \in G$ .

On en déduit :

$$g^{-1} \cdot x = g^{-1} \cdot (g \cdot y) = e \cdot y = y,$$

et donc  $y \mathcal{R} x$  car  $g^{-1} \in G$ .

• La relation est transitive car si  $x \mathcal{R} y$  et  $y \mathcal{R} z$ , on écrit :

$$\begin{cases} x = g \cdot y \\ y = h \cdot z \end{cases}, \text{ donc } x = (g \star h) \cdot z,$$

avec  $g$  et  $h$  dans  $G$ , donc également  $g \star h$ .

- (b) Soit  $x \in X$ . On montre que l'orbite  $\mathcal{O}(x)$  est exactement la classe d'équivalence de l'élément  $x$  pour cette relation  $\mathcal{R}$ .

En effet, si  $y \in \mathcal{O}(x)$ , il existe  $g \in G$  tel que  $y = g \cdot x$ , donc  $y\mathcal{R}x$  et l'élément  $y$  appartient à la classe d'équivalence de  $x$ .

Si  $y$  appartient à la classe d'équivalence de  $x$ , alors  $y\mathcal{R}x$  et il existe  $h \in G$  tel que  $y = h \cdot x \in \mathcal{O}(x)$ .

On sait finalement que l'ensemble des classes d'équivalence partitionne l'ensemble  $X$ .

- (c) On suppose le groupe  $G$  fini. Soit un élément  $x$  dans  $X$ .

Le sous-groupe  $\text{Stab}(x)$  est un sous-groupe de  $G$ , donc est également fini.

Par le théorème de Lagrange, en notant  $\mathcal{S}$  la relation sur  $G$  :

$$\forall (g, h) \in G^2, \quad g\mathcal{S}h \iff \exists s \in \text{Stab}(x), \quad g = h \star s,$$

alors la relation  $\mathcal{S}$  est une relation d'équivalence. De plus, pour tout  $g \in G$ , la classe d'équivalence pour cette relation est l'ensemble :

$$g\text{Stab}(x) = \{g \star s ; s \in \text{Stab}(x)\}.$$

Cet ensemble est en bijection avec l'ensemble  $\text{Stab}(x)$ , via la translation à gauche bijective :  $s \mapsto g \star s$ .

Il y a donc exactement :

$$\frac{|G|}{|\text{Stab}(x)|} = q$$

classes d'équivalence, que l'on note  $[g_1], \dots, [g_q]$ .

Il s'agit maintenant de montrer que l'orbite  $\mathcal{O}(x)$  compte exactement  $q$  éléments.

L'application :

$$\chi : \begin{array}{ccc} \llbracket 1, q \rrbracket & \longrightarrow & \mathcal{O}(x) \\ i & \longmapsto & g_i \cdot x \end{array}$$

est déjà bien définie car si  $g_i$  et  $g'_i$  représentent la même classe  $[g_i]$ , alors :

$$g_i\mathcal{S}g'_i$$

et il existe  $s \in \text{Stab}(x)$  tel que  $g_i = g'_i \star s$ .

On en déduit :

$$g_i \cdot x = (g'_i \star s) \cdot x = g'_i \cdot (s \cdot x) = g'_i \cdot x.$$

La définition est bien consistante.

Ensuite, l'application  $\chi$  est injective. En effet, si  $i$  et  $j$  sont deux entiers entre 1 et  $q$  tels que :

$$\chi(i) = \chi(j),$$

alors  $g_i \cdot x = g_j \cdot x$ , puis en composant à gauche par  $g_j^{-1}$  :

$$(g_j^{-1} \star g_i) \cdot x = e \cdot x = x.$$

L'élément  $s = g_j^{-1} \star g_i$  est dans  $\text{Stab}(x)$ . L'écriture :

$$g_j \star s = g_i$$

montre que  $g_i \mathcal{S} g_j$ , puis  $[g_i] = [g_j]$  et bientôt  $i = j$ .

Enfin, l'application  $\chi$  est surjective. En effet, soit  $y$  dans  $\mathcal{O}(x)$ . Il existe  $g \in G$  tel que :

$$g \cdot x = y.$$

La classe  $[g]$  est l'une des classes  $[g_1], \dots, [g_q]$ . On pose :

$$[g] = [g_i], \text{ pour un certain entier } i \text{ entre } 1 \text{ et } q.$$

Comme  $g \mathcal{S} g_i$ , il existe  $s \in \text{Stab}(x)$  tel que  $g = g_i \star s$ . On en déduit :

$$g \cdot x = g_i \cdot (s \cdot x) = g_i \cdot x.$$

Conclusion,  $\chi(i) = y$ .

Par bijectivité de l'application  $\chi$ ,

$$|\mathcal{O}(x)| = q = \frac{|G|}{|\text{Stab}(x)|}.$$

### *Partie III : équation aux classes*

6. En utilisant la question **5.(b)**, il suffit de prendre le cardinal de la réunion disjointe des orbites, puis de séparer les orbites réduites à un singleton et les autres, via l'équivalence :

$$\forall x \in X, \quad |\mathcal{O}(x)| = 1 \iff x \in \text{Fix}(G).$$

7. Il s'agit de l'action triviale :

$$(g, x) \longmapsto x.$$

En effet, en utilisant les notations de la question précédente, d'après la question **Q.5.(c)**, chaque cardinal  $|\mathcal{O}(x_i)|$  est un entier supérieur ou égal à 2 qui divise  $|G| = 833$ . Comme la décomposition en facteurs premiers de 833 est :

$$833 = 7^2 \times 17$$

alors chaque terme de la somme  $\sum_i |\mathcal{O}(x_i)|$  est à la fois supérieur ou égal à 7 et inférieur au cardinal de  $X$  : ceci est rigoureusement impossible.

Tout ceci pour dire que la somme  $\sum_i |\mathcal{O}(x_i)|$  est vide et :

$$\text{Fix}(G) = X, \text{ puis } \forall g \in G, \forall x \in X, \quad g \cdot x = x.$$

8. On utilise l'action du groupe  $G$  sur lui-même par conjugaison, conformément à la question **Q.3**.

Les éléments du centre  $Z(G)$  sont exactement les éléments de  $\text{Fix}(G)$  car pour tout  $g \in G$ , on a les équivalences :

$$\begin{aligned} g \in Z(G) &\iff \forall h \in G, h \star g = g \star h \\ &\iff \forall h \in G, h \star g \star h^{-1} = g \\ &\iff \forall h \in G, h \cdot g = g. \end{aligned}$$

Or, chaque terme  $|\mathcal{O}(x_i)|$  de la deuxième somme est un diviseur supérieur à 2 de  $|G|$ , donc est un entier multiple de  $p$ .

Conclusion, le centre de  $G$  dont on sait qu'il s'agit d'une sous-groupe de  $G$  ne peut être réduit à  $\{e\}$  car tous les termes  $|X| = |G|$  et  $\sum_i |\mathcal{O}(x_i)|$  sont multiples de  $p$ , donc

$|\text{Fix}(G)| = |Z(G)|$  est également un multiple de l'entier  $p$ .

9. Soit  $g$  dans  $G$ . On montre l'égalité :

$$gZ(G) = Z(G)g$$

par double inclusion.

Soit  $a$  un élément de l'ensemble de gauche. Il existe  $h \in Z(G)$  tel que :

$$a = g \star h.$$

Ainsi,  $a = h \star g \in Z(G)g$ .

L'autre inclusion est aussi immédiate.

10. Soient  $g_1, g'_1, g_2$  et  $g'_2$  quatre éléments dans  $G$  tels que :

$$g_1Z(G) = g'_1Z(G) \text{ et } g_2Z(G) = g'_2Z(G).$$

Alors, comme  $g_1 = g_1 \star e \in g_1Z(G)$ , il existe  $h_1 \in Z(G)$  tel que  $g_1 = g'_1 \star h_1$ .

De même, il existe  $h_2 \in Z(G)$  tel que  $g_2 = g'_2 \star h_2$ .

On en déduit :

$$\begin{aligned} (g_1 \star g_2)Z(G) &= (g'_1 \star h_1 \star g'_2 \star h_2)Z(G) \\ &= (g'_1 \star g'_2) \left( (h_1 \star h_2)Z(G) \right), \text{ car } h_1 \text{ et } h_2 \text{ commutent avec tout} \\ &= (g'_1 \star g'_2)Z(G), \text{ par bijectivité sur } Z(G) \text{ de } a \longmapsto (h_1 \star h_2) \star a. \end{aligned}$$

L'application  $\nabla$  est donc bien définie, la formule proposée ne dépendant pas des représentants choisis dans les ensembles  $gZ(G)$ .

L'application  $\nabla$  est bien une LCI sur  $G/Z(G)$ .

Ensuite, on voit que  $\nabla$  est associative, par associativité de  $\star$  sur  $G$ . Elle admet un neutre :  $Z(G) = eZ(G)$ .

Enfin, tout élément est symétrisable, car :

$$\forall g \in G, gZ(G)\nabla g^{-1}Z(G) = eZ(G) = g^{-1}Z(G)\nabla gZ(G).$$

Pour tout  $g \in G$ , le symétrique de  $gZ(G)$  est  $g^{-1}Z(G)$ .

11. Soit  $H$  un groupe de cardinal  $q$ , où  $q$  est un nombre premier. Soit  $x \in H \setminus \{e\}$ . Le sous-groupe  $\langle x \rangle$  engendré par  $x$  est de cardinal au moins 2 car ce sous-groupe contient au moins  $e$  et  $x$  et par le théorème de Lagrange, son cardinal divise  $q$ , qui est premier, donc vaut  $q$ . L'inclusion

$$\langle x \rangle \subset H$$

couplée avec l'égalité des cardinaux finis donne l'égalité.

L'élément  $x$  est d'ordre  $q$  et l'application :

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} & \longrightarrow & H \\ \dot{k} & \longmapsto & x^k \end{array}$$

est bien définie car si  $\dot{k} = \dot{\ell}$ , alors  $q$  divise  $k - \ell$  et  $x^k = x^\ell$  car  $x^q = e$ .

Ensuite, on voit assez facilement que l'application  $\Phi$  est un morphisme de groupes entre  $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, +)$  et  $(H, \star)$  et que c'est injectif, par définition de l'ordre  $q$  de l'élément  $x$ . Enfin, par égalité des cardinaux finis entre  $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$  et  $H$ , l'application  $\Phi$  est une bijection.

12. Soit  $G$  un groupe de cardinal  $p^2$ .

Le centre  $Z(G)$  est de cardinal divisant  $p^2$  et n'est pas égal à 1. On distingue deux cas :

—> si  $Z(G)$  est de cardinal  $p^2$ , alors  $Z(G) = G$  et  $G$  est directement abélien

—> si  $Z(G)$  est de cardinal  $p$ , alors l'ensemble  $G/Z(G)$  est aussi de cardinal  $p$ , donc est cyclique puis abélien. Choisissons un élément  $x \in G \setminus Z(G)$ .

Le stabilisateur de  $x$  vis-à-vis de l'action de conjugaison est un sous-groupe de  $G$  qui contient  $Z(G)$  et  $x$ , donc est de cardinal strictement supérieur à  $p$  et divise  $p^2$ .

Ainsi,

$$\text{Stab}(x) = G$$

et pour tout  $g \in G$ ,  $g \star x \star g^{-1} = x$ , donc  $g \star x = x \star g$ , ce qui montre que l'élément  $x$  appartient au centre  $Z(G)$ , ce qui est contraire au choix de  $x$ . Ce cas ne se produit jamais.

Dans le seul cas possible, le groupe  $G$  est abélien.