Travaux dirigés sur les groupes

Problème : actions de groupes

Soient $(G,\star)$ un groupe et X un ensemble non vide.
Une ***action du groupe*** G ***sur l'ensemble*** X est une application que l'on note en général par le symbole $\cdot$:

$$\cdot : \left| \begin{array}{ccc} G\times X & \longrightarrow & X \\ (g,x) & \longmapsto & g\cdot x \end{array} \right.$$

vérifiant les deux conditions suivantes :

- pour tous g et h dans G et pour tout $x\in X$,

$$g\cdot(h\cdot x) = (g\star h)\cdot x$$

- pour tout $x\in X$, en notant e le neutre du groupe G, on a : $e\cdot x = x$.

On dira dans ce cas que ***le groupe*** G ***agit sur l'ensemble*** X.
Soit $x\in X$.
Avec les notations précédentes, on appelle ***orbite de*** x ***par*** G, l'ensemble :

$$\mathscr{O}(x) = \Big\{ g\cdot x \ ; \ g\in G \Big\}.$$

On appelle ***stabilisateur de*** x, l'ensemble :

$$\mathrm{Stab}(x) = \Big\{ g\in G \mid g\cdot x = x \Big\}.$$

Partie I : quelques exemples

1. ***action du groupe symétrique***

   (a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$ un entier naturel. Montrer que le groupe $(S_n,\circ)$ agit sur l'ensemble $X = [\![1,n]\!]$ par l'action :
   $$(\sigma,k)\longmapsto \sigma(k).$$

   (b) Soit $k\in[\![1,n]\!]$. Déterminer l'orbite $\mathscr{O}(k)$ par S_n.

   (c) Déterminer le cardinal du stabilisateur de k.

2. ***action du groupe sur lui-même par translation***
   (a) Soit $(G,\star)$ un groupe. Montrer que le groupe G agit sur l'ensemble $X = G$ selon :
   $$(g,x) \longmapsto g \star x.$$
   (b) Soit $x \in G$. Déterminer l'orbite $\mathscr{O}(x)$.
3. ***action du groupe sur lui-même par conjugaison***
   Soit $(G,\star)$ un groupe. Montrer que le groupe G agit sur l'ensemble $X = G$ selon :
   $$(g,x) \longmapsto g \star x \star g^{-1}.$$

Partie II : quelques propriétés générales

On considère ici un groupe $(G,\star)$ agissant sur un ensemble non vide X, avec l'action $(g,x) \longmapsto g \cdot x$.
Si A est un ensemble fini, on désignera par $|A|$ son cardinal, c'est-à-dire le nombre de ses éléments.

4. Soit $x \in X$. Montrer que le stabilisateur de x est un sous-groupe de G.
5. On définit la relation $\mathscr{R}$ sur l'ensemble X par :
   $$\forall (x,y) \in X^2,\ x\mathscr{R}y \iff \exists g \in G,\ x = g \cdot y.$$
   (a) Montrer que la relation $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.
   (b) En déduire que l'ensemble des orbites :
   $$\Big\{ \mathscr{O}(x)\ ;\ x \in X \Big\}$$
   forme une partition de l'ensemble X.
   (c) Montrer que si le groupe G est fini, alors pour tout $x \in X$:
   $$|G| = \Big|\mathscr{O}(x)\Big| \times \Big|\mathrm{Stab}(x)\Big|.$$

Partie III : équation aux classes

Soient $(G,\star)$ un groupe fini et X un ensemble fini. On note :
$$\mathrm{Fix}(G) = \Big\{ x \in X \mid \forall g \in G,\ g \cdot x = x \Big\}.$$

6. Montrer la formule :
   $$|X| = \Big|\mathrm{Fix}(G)\Big| + \sum_i \Big|\mathscr{O}(x_i)\Big|$$
   où les orbites $\mathscr{O}(x_i)$ qui figurent dans la somme sont les orbites différentes qui contiennent au moins deux éléments.

7. **Une première application.**
   On considère une action d'un groupe $(G, \star)$ de cardinal 833 sur un ensemble X de cardinal 5. Que peut-on dire de cette action ?
8. **Une seconde application.**
   Soit p un nombre premier. On suppose que le groupe G est un p-***groupe***, c'est-à-dire que le cardinal du groupe G est une puissance de p, avec $|G| > 1$.
   Montrer en utilisant une action de groupe par conjugaison que le centre :
   $$Z(G) = \Big\{ g \in G \mid \forall h \in G,\ g \star h = h \star g \Big\}$$
   n'est pas réduit à $\{0\}$.
9. En posant pour tout $g \in G$ l'ensemble :
   $$gZ(G) = \Big\{ g \star h \ ;\ h \in Z(G) \Big\},$$
   montrer avec des notations intuitives que pour tout $g \in G$,
   $$gZ(G) = Z(G)g.$$
10. On note $G/Z(G)$ l'ensemble :
    $$G/Z(G) = \Big\{ gZ(G) \ ;\ g \in G \Big\}.$$
    En déduire que l'application :
    $$\nabla : \left| \begin{array}{ccc} G/Z(G) \times G/Z(G) & \longrightarrow & G/Z(G) \\ \Big(g_1 Z(G), g_2 Z(G)\Big) & \longmapsto & (g_1 \star g_2) Z(G) \end{array} \right.$$
    est une application bien définie et que le couple $(G/Z(G), \nabla)$ forme un groupe.
11. Montrer que tout groupe de cardinal q égal à un nombre premier est cyclique, c'est-à-dire isomorphe au groupe $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, +)$.
12. En déduire que si G est un groupe de cardinal p^2, avec p un nombre premier, alors le groupe G est commutatif.