Travaux dirigés sur les fractions rationnelles – corrigé –

Exercice 1

1. On décompose déjà en éléments simples la fraction :

$$\frac{X^3}{(X+1)(X^2+4)}\ ,\ \text{dans } \mathbb{R}(X).$$

On trouve après calculs simples :

$$\begin{aligned}\frac{X^3}{(X+1)(X^2+4)} &= 1-\frac{X^2+4X+4}{(X+1)(X^2+4)}\\ &= 1-\frac{4}{5}\cdot\frac{X+4}{X^2+4}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{X+1}.\end{aligned}$$

Une primitive de la fonction :

$$f : t \longmapsto \frac{t^3}{(t+1)(t^2+4)}$$

est donc :

$$F : t \longmapsto t-\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\ln(t^2+4)\right)-\frac{8}{5}\cdot\arctan\left(\frac{t}{2}\right)-\frac{1}{5}\ln(|t+1|).$$

On en déduit alors facilement :

$$I = F(2)-F(0) = 2-\frac{\ln(12)}{5}-\frac{2\pi}{5}.$$

2. La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est clairement croissante.
Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Le plus simple est de simplifier la somme S_n par une décomposition en éléments simples.
On voit que :

$$\frac{1}{X(X+1)(X+2)(X+3)} = \frac{a}{X}+\frac{b}{X+1}+\frac{c}{X+2}+\frac{d}{X+3},$$

avec :

$$a=\frac{1}{6},\ b=-\frac{1}{2},\ c=\frac{1}{2}\text{ et }d=-\frac{1}{6}.$$

On en déduit en posant la somme harmonique :

$$\forall p\in\mathbb{N}^*,\ H_p=\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k},$$

que l'on a :

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{6}\,H_n-\frac{1}{2}\,(H_{n+1}-1)+\frac{1}{2}\left(H_{n+2}-1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{6}\left(H_{n+3}-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\\
&= \frac{1}{6}\,H_n-\frac{1}{2}\,(H_n-1+\circ(1))+\frac{1}{2}\left(H_n-1-\frac{1}{2}+\circ(1)\right)-\frac{1}{6}\left(H_n-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\circ(1)\right)\\
&= \frac{1}{18}+\circ(1).
\end{aligned}$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente de limite $\dfrac{1}{18}$.

3. (a) La DES est de la forme :

$$F(X)=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(X-1)^k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{(X+1)^k},$$

les constantes a_k et b_k étant réelles.

(b) La fonction f est de classe C^∞ localement en 0, donc admet un $DL_n(0)$. Après calculs, on obtient :

$$f(2+t)=\sum_{k=0}^{n}c_k\cdot t^k+\circ(t^n),$$

avec :

$$\forall k\in[\![0,n]\!],\ c_k=\frac{(-1)^k}{2^{n+k}}\cdot\binom{n+k-1}{k}.$$

(c) On en déduit localement en 0 :

$$f(2+t)=t^nF(1+t)=\sum_{k=1}^{n}a_k\cdot t^{n-k}+\mathcal{O}(t^n)=\sum_{k=1}^{n}a_k\cdot t^{n-k}+\circ(t^{n-1}).$$

Par unicité du $DL_{n-1}(0)$ de la fonction f, on obtient :

$$\forall k\in[\![1,n]\!],\ a_k=c_{n-k}=\frac{(-1)^{n-k}}{2^{2n-k}}\cdot\binom{2n-k-1}{n-k}.$$

(d) On remarque que $F(-X)=F(X)$, donc par unicité de la DES,

$$\forall k\in[\![1,n]\!],\ b_k=(-1)^ka_k=\frac{(-1)^n}{2^{2n-k}}\cdot\binom{2n-k-1}{n-k}.$$

Exercice 2

1. En posant $F = \dfrac{P}{Q}$, avec P et Q deux polynômes dans $\mathbb{C}[X]$, avec Q unitaire et premier avec P, alors :
$$G(X) = \frac{P(1-X)}{Q(1-X)}.$$
Les polynômes $P(1-X)$ et $Q(1-X)$ restent premiers entre eux car on dispose d'une relation de Bezout entre P et Q de la forme :
$$PU + QV = 1.$$
La composition à droite par $1-X$ dans cette égalité amène à une relation de Bezout entre les polynômes $P(1-X)$ et $Q(1-X)$.
Les pôles de la fraction $G(X)$ sont exactement les racines de $Q(1-X)$. Les pôles de $F(X)$ sont les racines de $Q(X)$, formant l'ensemble $Z(Q)$.
On en déduit :
$$\forall z \in \mathbb{C},\ \lambda \in Z\Big(Q(1-X)\Big) \iff 1-z \in Z(Q).$$
Le polynôme $Q(1-X)$ n'admet pas 0 comme racine et :
$$F\left(\frac{X^2}{X^2+1}\right) = G\left(1 - \frac{X^2}{X^2+1}\right) = G\left(\frac{1}{X^2+1}\right).$$
D'autre part, la fraction $G(X)$ ne peut être constante car $F(X)$ ne l'est pas.
Une formulation équivalente du problème est alors :
« Soit $G(X) \in \mathbb{C}(X)$ une fraction rationnelle non constante et n'admettant pas 0 comme pôle. On veut montrer que la fraction
$$G\left(\frac{1}{X^2+1}\right)$$
n'est pas un polynôme. »
2. La fraction proposée se réécrit :
$$\frac{c\,(X^2+1)^\alpha}{\Big(-\lambda X^2 + (1-\lambda)\Big)^\alpha}.$$
La fraction n'est plus simplifiable car $\pm i$ ne sont pas racines du dénominateur puisque l'évaluation en $\pm i$ au dénominateur donne :
$$\Big(\lambda + 1 - \lambda\Big)^\alpha = 1.$$
Les pôles demandés sont les racines du polynôme $-\lambda X^2 + (1-\lambda)$ ou encore les racines du polynôme
$$X^2 + \frac{\lambda - 1}{\lambda}.$$

Les pôles sont les solutions de l'équation :

$$z^2 = \frac{1-\lambda}{\lambda} \iff z^2+1 = \frac{1}{\lambda}.$$

Il y a au moins un pôle à cette fraction rationnelle.

3. Supposons par l'absurde que $F\left(\dfrac{X^2}{X^2+1}\right)$ soit un polynôme, n'admettant donc aucun pôle.

   D'après la première question, la fraction rationnelle $G\left(\dfrac{1}{X^2+1}\right)$ est encore un polynôme, n'admettant aucun pôle.
   La décomposition en éléments simples de la fraction $G(X)$ fait apparaître une partie polynôme $E(X)$ et une somme de termes de la forme $\dfrac{c}{(X-\lambda)^\alpha}$, avec λ non nul.
   En prenant l'un des derniers termes avec α maximal, alors la question précédente montre que cette fraction rationnelle admet un pôle z_0 tel que $z_0^2+1=\dfrac{1}{\lambda}$. On a vu que z_0 ne pouvait appartenir à l'ensemble $\{i,-i\}$.
   Ce pôle ne peut pas disparaître avec d'autres termes de la forme de la question **Q.2** car si $\mu \neq \lambda$ et μ est non nul, alors les solutions des deux équations :

   $$z^2+1=\frac{1}{\lambda} \text{ et } z^2+1=\frac{1}{\mu}$$

   forment des ensembles disjoints.
   La seule possibilité pour éliminer ce pôle $z_0 \neq \pm i$ est de faire jouer la partie polynôme. Cependant, comme $E(X) \in \mathbb{C}[X]$, alors la fraction $E\left(\dfrac{1}{X^2+1}\right)$ admet seulement $\pm i$ comme éventuels pôles.
   On en déduit que le pôle z_0 demeure si on a un terme de la forme $\dfrac{c}{(X-\lambda)^\alpha}$ dans la DES de $G(X)$.
   Tout ceci amène à une contradiction indiquant que la fraction $G(X)$ n'admet aucun pôle et donc que $G(X)=E(X)$ est un polynôme. La fraction $E\left(\dfrac{1}{X^2+1}\right)$ admet cependant $\pm i$ comme pôles dès que le polynôme $E(X)$ n'est pas constant, ce qui est le cas pour la fraction $G(X)=E(X)$.
   Conclusion, quoi qu'il arrive, la fraction $G\left(\dfrac{1}{X^2+1}\right)$ admet au moins un pôle complexe, lui interdisant donc d'être un polynôme. On termine par le fait que les fractions $G\left(\dfrac{1}{X^2+1}\right)$ et $F\left(\dfrac{X^2}{X^2+1}\right)$ sont égales.