Travaux dirigés sur les familles sommables – corrigé –

Exercice 1

1. On pose la famille $\mathscr{F} = \left(a_{p,q} = \dfrac{1}{pq(p+q)} \right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$.

   Lorsque l'entier p est fixé dans $\mathbb{N}^*$, la série $\sum\limits_q |a_{p,q}|$ est convergente car :

$$a_{p,q} = \mathscr{O}\left(\frac{1}{q^2}\right) \text{, lorsque } q \text{ est au voisinage de } +\infty.$$

   De plus, on peut calculer la somme de cette série par une décomposition en éléments simples, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\xi_p = \sum_{q=1}^{+\infty} |a_{p,q}| &= \frac{1}{p}\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{q(p+q)} \\
&= \frac{1}{p}\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{p} \times \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p+q}\right) \\
&= \frac{1}{p^2} \lim_{N\longrightarrow+\infty} \sum_{q=1}^{N} \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p+q}\right) \\
&= \frac{1}{p^2} \lim_{N\longrightarrow+\infty} \left(\sum_{q=1}^{N} \frac{1}{q} - \sum_{q=p+1}^{p+N} \frac{1}{q}\right) \\
&= \frac{1}{p^2} \lim_{N\longrightarrow+\infty} \left(\sum_{q=1}^{p} \frac{1}{q} - \sum_{q=N+1}^{p+N} \frac{1}{q}\right) \\
&= \frac{1}{p^2} \sum_{q=1}^{p} \frac{1}{q} \\
&= \frac{\ln p \times (1 + \circ(1))}{p^2} = \circ\left(\frac{1}{p^{3/2}}\right),
\end{aligned}$$

   cette dernière quantité étant de série convergente.
   La famille proposée est bien sommable.

2. On va montrer qu'une CNS est :

   « la fonction f est la fonction nulle. »

Si la fonction f est nulle, alors la famille $(f(x))_{x\in\mathbb{R}}$ est bien sommable car pour toute partie finie J incluse dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\sum_{x\in J} |f(x)| = 0.$$

Si la fonction f n'est pas la fonction nulle, il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) \neq 0$.
Posons $\eta = \dfrac{|f(x_0)|}{2} > 0$.
Par continuité de la fonction f, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha],\ |f(x)| \geqslant \eta,$$

en utilisant la continuité de la fonction f au point x_0 avec $\varepsilon = \eta$.
Soit $M > 0$.
Soit J une partie finie incluse dans l'ensemble infini $[x_0-\alpha, x_0+\alpha]$ telle que : $\mathrm{Card}(J) > \dfrac{M}{\eta}$.
On en déduit :

$$\sum_{x\in J} |f(x)| \geqslant \sum_{x\in J} \eta = \mathrm{Card}(J) \times \eta > M.$$

On vient de montrer que l'ensemble :

$$\left\{ \sum_{x\in J} |f(x)|\ ;\ J \text{ est une partie finie de } \mathbb{R} \right\}$$

est un ensemble non majoré.
La famille $(f(x))_{x\in\mathbb{R}}$ n'est pas sommable dans ce cas.

3. On note la famille $\mathscr{G}_\alpha = \left(\dfrac{1}{(m+n)^\alpha} \right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$.
On procède par analyse / synthèse.

• analyse
Supposons la famille $\mathscr{G}_\alpha$ sommable.
Cela implique que si l'entier m est fixé dans $\mathbb{N}^*$, alors la famille

$$\mathscr{H}_m = \left(\frac{1}{(m+n)^\alpha} \right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

soit sommable, donc que la série $\displaystyle\sum_n \frac{1}{(m+n)^\alpha}$ soit convergente.

Or,

$$\frac{1}{(m+n)^\alpha} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} \frac{1}{n^\alpha},$$

et tout est positif. La série de Riemann $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ est nécessairement convergente, imposant $\alpha > 1$.
De plus, la somme

$$\xi_m = \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{1}{(m+n)^\alpha} \right|$$

doit être de famille sommable, donc doit être de série convergente, car tout est positif.

On établit un équivalent de la quantité positive $\xi_m = \displaystyle\sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, lorsque m tend vers $+\infty$, et ce, grâce à un encadrement série / intégrale.

On pose la fonction :

$$g : \left| \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{t^\alpha} \end{array} \right. ,$$

cette fonction étant continue et décroissante.

On en déduit l'encadrement classique :

$$\int_k^{k+1} g \leqslant g(k) \leqslant \int_{k-1}^k g,$$

l'inégalité de gauche étant valable pour tout entier $k \geqslant 1$ et celle de droite pour tout entier $k \geqslant 2$.

Lorsque l'entier m est supérieur ou égal à 1, en sommant sur les entiers entre $m+1$ et $N \geqslant m+1$, on aboutit à :

$$\int_{m+1}^{N+1} g \leqslant \sum_{k=m+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_m^N g \qquad [\text{ encadrement } \bigstar \text{ }]$$

Or, pour tous réels $1 < a < b$, on a :

$$\int_a^b g = \left[\frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}} \right]_a^b = \frac{1}{\alpha-1} \cdot \left(\frac{1}{a^{\alpha-1}} - \frac{1}{b^{\alpha-1}} \right).$$

On en déduit que l'on peut passer à la limite lorsque N tend vers $+\infty$ dans l'encadrement $\bigstar$ ci-dessus pour obtenir :

$$\frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{(m+1)^{\alpha-1}} \leqslant \xi_m \leqslant \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{m^{\alpha-1}}.$$

La famille $\mathscr{G}_\alpha$ étant sommable, la famille $(\xi_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ l'est encore : la série $\displaystyle\sum_m \xi_m$ est donc convergente.

La série à termes positifs $\displaystyle\sum_m \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{(m+1)^{\alpha-1}}$ est croissante majorée, donc convergente et le terme général est équivalent à

$$\frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{m^{\alpha-1}},$$

lorsque m tend vers $+\infty$. Comme tout est positif, cela impose la convergence de la série de Riemann $\displaystyle\sum_m \frac{1}{m^{\alpha-1}}$ et donc $\alpha - 1 > 1$, puis $\alpha > 2$.

• synthèse

Supposons $\alpha > 2$.

La série $\sum_n \frac{1}{(m+n)^\alpha}$ est donc convergente et par les calculs faits plus haut, la série $\sum_m \frac{1}{m^{\alpha-1}}$ étant convergente, la série à termes positifs $\sum_m \xi_m$ reste convergente en utilisant cette fois-ci les inégalités de droite dans les encadrements établis.
Conclusion, la famille $\mathscr{G}_\alpha$ est sommable.

Une CNS est $\boxed{\alpha > 2.}$

Exercice 2

1. On considère la famille :

$$\mathscr{F} = \left(\frac{1}{k!}\right)_{0 \leqslant n \leqslant k}.$$

Cette famille est sommable car en fixant l'entier k dans $\mathbb{N}$, la famille $\left(\frac{1}{k!}\right)_{0 \leqslant n \leqslant k}$ portant sur l'indice n est finie donc sommable et :

$$\xi_k = \sum_{n=0}^{k} \left|\frac{1}{k!}\right| = \frac{k+1}{k!}$$

qui est une quantité de série convergente car $\xi_k = \circ\left(\frac{1}{k^2}\right)$.
La famille $\mathscr{F}$ est sommable et on peut effectuer les interversions de somme que l'on veut (en fait, on peut toujours effectuer les interversions de sommes que l'on veut lorsque l'on manipule des termes positifs. On sait ici que les sommes calculées sont finies).
On peut effectuer l'interversion suivante :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!} &= \sum_{0 \leqslant n \leqslant k} \frac{1}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{k} \frac{1}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1}{k!} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \\
&= \boxed{2e.}
\end{aligned}$$

2. On montre la question sans montrer la sommabilité, ce qui est autorisé car tout est positif, certaines sommes étant potentiellement égales à $+\infty$ (en fait toutes les sommes écrites sont finies...)

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha} &= \sum_{1\leqslant n\leqslant k}\frac{1}{k^\alpha}\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{k^\alpha}\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k}{k^\alpha}\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{\alpha-1}}.
\end{aligned}$$

Exercice 3

On considère la famille :

$$\mathscr{F} = \left(x^{kn}\right)_{(k,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}.$$

Cette famille est sommable.

En effet, si l'on fixe par exemple l'entier k dans $\mathbb{N}^*$, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}|x|^{kn}$ est convergente car il s'agit d'une série géométrique de raison $q = |x|^k$, avec $|q| < 1$.

De plus, on peut calculer la somme de cette série, ce qui donne :

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \xi_k = \sum_{n=1}|x|^{kn} = \frac{|x|^k}{1-|x|^k}.$$

On voit que la série $\displaystyle\sum_k \xi_k$ reste convergente car le terme général $u_k = \dfrac{|x|^k}{1-|x|^k}$ est en $\mathscr{O}(|x|^k)$ de série géométrique convergente.

La famille $\mathscr{F}$ est sommable.

D'une part, on décide d'effectuer la sommation sur les paquets :

$$\mathscr{P}_k = \Big\{(k,n)\ ;\ n\in\mathbb{N}^*\Big\},$$

ce qui donne en notant σ la somme de la famille $\mathscr{F}$:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}x^{kn}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{1-x^k}.$$

D'autre part, on décide d'effectuer la sommation sur les paquets :

$$\mathscr{Q}_r = \Big\{(k,n)\mid k\cdot n = r\Big\},$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\sigma &= \sum_{r=1}^{+\infty} \sum_{(k,n)\in\mathcal{Q}_r} x^{kn} \\
&= \sum_{r=1}^{+\infty} \sum_{(k,n)\in\mathcal{Q}_r} x^{r} \\
&= \sum_{r=1}^{+\infty} \mathrm{Card}(\mathcal{Q}_r)\cdot x^{r} \\
&= \sum_{r=1}^{+\infty} d(r)\ x^{r}.
\end{aligned}$$

Exercice 4

1. On voit un produit de Cauchy.
   Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$a_n = \frac{1}{3^n} \text{ et } b_n = \frac{(2/3)^n}{n!}.$$
   On remarque alors que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ 3^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k \times a_{n-k}.$$
   Les deux séries $\sum_n a_n$ et $\sum_n b_n$ étant absolument convergentes, la série proposée dans l'énoncé reste absolument convergente, de somme égale à :
   $$\begin{aligned}
   \sum_{n=0}^{+\infty} 3^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right) \\
   &= \exp\left(\frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \\
   &= \boxed{\frac{3}{2} \times e^{\frac{2}{3}}.}
   \end{aligned}$$

2. D'une part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire dans l'anneau commutatif $\mathbb{C}$:
   $$\frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} = \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}.$$
   Les séries $\sum_n a^n$ et $\sum_n b^n$ sont absolument convergentes, ainsi que leur produit de Cauchy. La série proposée dans l'énoncé est absolument convergente et :
   $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b^n\right) = \frac{1}{1-a} \times \frac{1}{1-b},$$
   ce qui donne ce qu'il faut.

3. La série proposée n'est pas absolument convergente : le cours ne dit rien dans ce cas. On note :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ si } n = 0 \\ \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \text{ si } n \geqslant 1 \end{array} \right. .$$

On en déduit que le produit de Cauchy de la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ avec elle-même donne la série :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n,$$

avec $c_0 = c_1 = 0$ et

$$\begin{aligned} \forall n \geqslant 2,\ c_n &= \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot a_{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cdot a_{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{k} \cdot \sqrt{n-k}} \\ &= (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k} \cdot \sqrt{n-k}}. \end{aligned}$$

Il y a plusieurs façons de montrer que la quantité

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k} \cdot \sqrt{n-k}}$$

ne tend pas vers 0, ce qui entraînera le fait que la série $\sum\limits_{n} c_n$ diverge grossièrement.

On peut par exemple utiliser :

$$\forall (\alpha, \beta) \in [0, +\infty[^2,\ \alpha \cdot \beta \leqslant \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2},$$

donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![1, n-1]\!],\ \sqrt{k} \cdot \sqrt{n-k} \leqslant \frac{n}{2},$$

et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k} \cdot \sqrt{n-k}} \geqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{n} = \frac{2(n-1)}{n},$$

quantité tendant vers 2, lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 5

1. Soient u et v deux éléments de $\ell^1(\mathbb{Z})$.
   On sait que la famille $\mathscr{F} = \Big(u_p \cdot v_q\Big)_{(p,q)\in\mathbb{Z}}$ reste sommable car les familles u et v le sont.
   Par ailleurs, en considérant les paquets
$$\mathscr{P}_n = \Big\{(p,q) \in \mathbb{Z}^2 \mid p+q = n\Big\}.$$
   on sait que les familles :
$$\mathscr{G}_n = (u_p \cdot v_q)_{(p,q)\in\mathscr{P}_n}$$
   sont sommables. En notant
$$\xi_n = \sum_{(p,q)\in\mathscr{P}_n} u_p \cdot v_q,$$
   on voit que :
$$\xi_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k \cdot v_{n-k}.$$
   La famille $u \star v$ est bien définie.
   De plus, on sait également que la famille $(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est encore sommable : la famille $u \star v$ est bien dans $\ell^1(\mathbb{Z})$.
   On a en outre l'égalité :
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (u\star v)_n = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n\right) \times \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n\right).$$

2. Par ce qui précède, toutes les sommes qui suivent sont finies et on peut effectuer les groupements par paquets que l'on veut.
   Par exemple, si u et v sont dans $\ell^1(\mathbb{Z})$, alors :
$$\forall n \in \mathbb{Z},\ (v\star u)_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} v_k \cdot u_{n-k} = \sum_{(p,q)\in\mathscr{P}_n} u_p \cdot v_q = (u\star v)_n.$$
   La loi $\star$ est commutative.
   Si u, v et w sont dans $\ell^1(\mathbb{Z})$, alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, les indices p, q, r, s et m qui suivent étant des entiers relatifs :
$$\begin{aligned}
\Big(u \star (v\star w)\Big)_n &= \sum_{p+q=n} u_p \cdot (v\star w)_q \\
&= \sum_{p+q=n} u_p \cdot \left(\sum_{r+s=q} v_r \cdot w_s\right) \\
&= \sum_{p+q=n}\sum_{r+s=q} u_p \cdot v_r \cdot w_s \\
&= \sum_{p+r+s=n} u_p \cdot v_r \cdot w_s \\
&= \sum_{m+s=n} \left(\sum_{p+r=m} u_p \cdot v_r\right) \cdot w_s \\
&= \sum_{m+s=n} (u\star v)_m \cdot w_s \\
&= \Big((u\star v)\star w\Big)_n.
\end{aligned}$$

Notons finalement l'élément :
$$\varepsilon = (\delta_{k,0})_{k\in\mathbb{Z}}.$$
Il s'agit de la suite nulle partout sauf à l'indice 0, le terme valant alors 1.
Il est évident que la famille ε appartient à $\ell^1(\mathbb{Z})$.
Soit ensuite un élément $u \in \ell^1(\mathbb{Z})$.
Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on peut écrire :
$$(\varepsilon \star u)_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varepsilon_k \cdot u_{n-k} = \varepsilon_0 \cdot u_n = u_n.$$
Conclusion, $\varepsilon \star u = u$ et par commutativité, $u \star \varepsilon = u$: l'élément ε est bien un élément neutre pour la loi $\star$.

3. La réponse est $\boxed{\text{non.}}$

   En effet, l'élément $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ défini par :
$$\forall n \in \mathbb{Z},\ u_n = \begin{cases} 1, \text{ si } n = 0 \\ -1, \text{ si } n = 1 \\ 0, \text{ sinon} \end{cases}$$
   appartient bien à $\ell^1(\mathbb{Z})$.
   Supposons l'existence d'un inverse v pour l'élément u.
   On en déduit $u \star v = \varepsilon$, puis :
$$\forall n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\},\ (u\star v)_n = 0, \text{ donc } \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k \cdot v_{n-k} = 0 \text{ et donc } v_n - v_{n-1} = 0.$$
   On obtient le fait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = v_{n-1}$ et que $v_{-n} = v_{-n-1}$.
   Dans la famille v, tous les termes d'indices positifs ou nuls sont égaux entre eux alors que tous les termes d'indices strictement négatifs sont égaux entre eux.
   Comme la famille v est sommable, les deux constantes présentées ci-dessus doivent être nulles et v doit être la famille nulle. Cependant, on aurait alors $\varepsilon = u \star v = u \star 0 = 0$, mais le neutre ε n'est pas la famille nulle.
   Tout élément de $\ell^1(\mathbb{Z})$ n'admet pas toujours d'inverse pour $\star$. Ce n'est pas un groupe pour $\star$.

Exercice 6

Comme tout est positif, on peut effectuer les groupements et interversions que l'on veut, les sommes calculées étant éventuellement infinies (en fait, toutes les sommes calculées sont en fait finies ici).
Premièrement, en utilisant $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$:
$$A = \left(\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}\right) \times \left(\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{q^2}\right) = \frac{\pi^4}{36}.$$

Deuxièmement, en utilisant $\zeta(4) = \dfrac{\pi^4}{90}$:

$$\begin{aligned} B &= \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2 \cdot (kp)^2} \right) \\ &= \left(\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^4} \right) \times \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \right) \\ &= \frac{\pi^6}{540}. \end{aligned}$$

Troisièmement, en revenant à la quantité A et en utilisant les paquets :

$$\mathscr{P}(d) = \Big\{ (p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \mid p \wedge q = d \Big\},$$

alors :

$$A = \sum_{d=1}^{+\infty} \sum_{(p,q)\in\mathscr{P}(d)} \frac{1}{p^2 q^2}.$$

Or, chaque élément $(p,q) \in \mathscr{P}(d)$ peut être mis sous la forme : (dp', dq'), avec $(p', q') \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et $p' \wedge q' = 1$.
Conclusion,

$$\begin{aligned} A &= \sum_{d=1}^{+\infty} \sum_{p',q'=1 \text{ et } p'\wedge q'=1} \frac{1}{d^2\ p'^2\ d^2\ q'^2} \\ &= \left(\sum_{d=1}^{+\infty} \frac{1}{d^4} \right) \times C. \end{aligned}$$

En définitive,

$$C = \frac{A}{\zeta(4)} = \frac{90}{36} = \frac{5}{2}.$$