Travaux dirigés sur les familles sommables

Exercice 1

1. La famille $\left(\dfrac{1}{pq(p+q)}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ est-elle sommable ?
2. Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue.
   Déterminer une CNS sur la fonction f pour que la famille $(f(x))_{x\in\mathbb{R}}$ soit sommable.
3. Soit $\alpha>0$. Déterminer une CNS sur α pour que la famille $\left(\dfrac{1}{(m+n)^\alpha}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ soit sommable. Pour ce faire, on pourra effectuer une comparaison série/intégrale.

Exercice 2

1. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k!}$.
2. Soit $\alpha>2$. Montrer la formule :
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^{\alpha-1}}.$$

Exercice 3

Soit $x\in]-1,1[$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note $d(n)$ le nombre de diviseurs strictement positifs de l'entier n.
Montrer que :
$$\sum_{n=1}^{+\infty}d(n)\,x^n=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{1-x^k}.$$

Exercice 4

1. Calculer :
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(3^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k!}\right).$$
2. Soient a et b deux complexes différents et de module strictement inférieur à 1. Montrer que :
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}=\frac{1}{1-(a+b)+ab}.$$

3. Montrer que le produit de Cauchy de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ avec elle-même donne une série divergente.

Exercice 5

On note $\ell^1(\mathbb{Z})$, l'ensemble des familles sommables $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de nombres complexes.
On note le produit de convolution $\star$ défini par :

$$\forall (u, v) \in \ell^1(\mathbb{Z})^2,\ u \star v = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k \cdot v_{n-k} \right)_{n\in\mathbb{Z}}.$$

1. Montrer que la loi $\star$ est une loi de composition interne sur $\ell^1(\mathbb{Z})$.
2. Montrer que cette loi $\star$ est associative, commutative et admet un élément neutre.
3. L'ensemble $\ell^1(\mathbb{Z})$ muni de $\star$ est-il un groupe ?

Exercice 6

Calculer les sommes :

$$A = \sum_{p,q=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2q^2},\ B = \sum_{p,q=1 \text{ et } p|q}^{+\infty} \frac{1}{p^2q^2} \text{ et } C = \sum_{p,q=1 \text{ et } p\wedge q=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2q^2}.$$