Travaux dirigés sur les fonctions de deux variables

Problème : le lemme de Poincaré

On travaille dans l'espace affine euclidien habituel $\mathbb{R}^2$. On note $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$, le produit scalaire habituel sur cet espace euclidien.
On rappelle que pour tous points a et b de $\mathbb{R}^2$, le segment $[a, b]$ est l'ensemble :

$$[a, b] = \Big\{ (1 - \lambda) \cdot a + \lambda \cdot b \; ; \; \lambda \in [0, 1] \Big\}.$$

Soit $\mathscr{A}$ une partie de $\mathbb{R}^2$. On dit que l'ensemble $\mathscr{A}$ est étoilé s'il existe un point $a \in \mathscr{A}$ tel que :

$$\forall b \in \mathscr{A}, \; [a, b] \subset \mathscr{A}.$$

1. Montrer que toute partie convexe de $\mathbb{R}^2$ est étoilée. La réciproque est-elle vraie ?

Soit $f : \mathscr{A} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction continue. On peut aussi interpréter la fonction f comme un champ vectoriel continu sur l'ensemble $\mathscr{A}$.
On dit que le champ vectoriel continu f dérive d'un potentiel s'il existe un champ scalaire $V : \mathscr{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tel que :

$$f = \overrightarrow{\mathrm{grad}} \, (V).$$

Pour tout $(x, y) \in \mathscr{A}$, on pose :

$$f(x, y) = \Big(f_1(x, y), f_2(x, y) \Big).$$

On dit que le champ vectoriel f est irrotationnel si le champ f est de classe C^1 et si :

$$\forall (x, y) \in \mathscr{A}, \; \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y).$$

On appelle chemin tracé dans $\mathscr{A}$, toute fonction

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathscr{A} \text{ continue et de classe } C^1 \text{ par morceaux.}$$

Soit $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathscr{A}$ un chemin tracé dans $\mathscr{A}$.
On appelle circulation du champ vectoriel continu f le long du chemin γ, le nombre :

$$\int_\gamma f(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \langle f(\gamma(t)) \mid \vec{\gamma}'(t) \rangle \; dt.$$

On dit que le chemin γ est fermé si $\gamma(0) = \gamma(1)$.

On dit que le champ vectoriel f est à circulation conservative si le champ f est continu et si pour tout chemin fermé $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathscr{A}$, on a :

$$\int_\gamma f(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0.$$

2. Montrer que tout champ vectoriel $f : \mathscr{A} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dérivant d'un potentiel est à circulation conservative.
3. Montrer que tout champ vectoriel $f : \mathscr{A} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 dérivant d'un potentiel est irrotationnel.
4. On considère maintenant le champ vectoriel suivant :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{1}{x^2+y^2} \cdot (-y, x) \end{array} \right. .$$

   (a) Montrer que l'ensemble $\mathscr{A} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est un ensemble non étoilé.
   (b) On considère un chemin fermé $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathscr{A}$ correspondant au cercle unité. Calculer la circulation $\displaystyle\int_\gamma f(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$. Le champ f est-il à circulation conservative ?
   (c) Le champ f est-il irrotationnel ?
   (d) Le champ f dérive-t-il d'un potentiel ?

Nous allons montrer dans la suite le lemme de Poincaré :

« Soit $\mathscr{A}$ un ensemble ouvert étoilé de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : \mathscr{A} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un champ à circulation conservative. Alors, le champ f dérive d'un potentiel. »

On considère donc un champ $f : \mathscr{A} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ à circulation conservative sur un ensemble ouvert et étoilé $\mathscr{A}$. Il existe un point $a_0 \in \mathscr{A}$ tel que :

$$\forall b \in \mathscr{A}, \ [a_0, b] \subset \mathscr{A}.$$

On notera alors ρ_b le chemin rectiligne tracé dans $\mathscr{A}$:

$$\rho_b : \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathscr{A} \\ t & \longmapsto & (1-t) \cdot a_0 + t \cdot b \end{array} \right. .$$

5. Soient $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathscr{A}$ et $\delta : [0,1] \longrightarrow \mathscr{A}$, deux chemins tracés dans $\mathscr{A}$ tels que $\gamma(0) = \delta(0)$ et $\gamma(1) = \delta(1)$.
   Montrer l'égalité des deux circulations :

$$\int_\gamma f(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_\delta f(\vec{r}) \cdot d\vec{r}.$$

6. Montrer que l'application :

$$V : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{A} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ b & \longmapsto & \displaystyle\int_{\rho_b} f(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \end{array} \right.$$

   est bien définie.
7. Montrer que l'application V est différnetiable et que $f = \overrightarrow{\text{grad}}\,(V)$.