Travaux dirigés sur les déterminants - corrigé -

Problème : réduction des matrices par le polynôme caractéristique

1. Soit λ dans $\mathbb{C}$. On utilise la formule du déterminant :

$$\chi_A(\lambda) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n (\lambda \cdot I_n - A)_{\sigma(k),k}.$$

Il est clair que chaque facteur $(\lambda \cdot I_n - A)_{\sigma(k),k}$ est de la forme $-a_{\sigma(k),k}$ si $\sigma(k) \neq k$ ou de la forme $\lambda - a_{k,k}$ si $\sigma(k) = k$.

La quantité $\chi_A(\lambda)$ apparaît donc comme une somme de produits de termes polynomiaux en la variable λ . C'est un polynôme en λ .

2. Soit σ une permutation dans $\mathfrak{S}_n$.

On distingue deux cas :

- si $\sigma = \text{id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}$, alors le produit :

$$\varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n (X I_n - A)_{\sigma(k),k}$$

est un polynôme unitaire de degré n

- si $\sigma \neq \text{id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}$, alors le produit

$$\varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n (X I_n - A)_{\sigma(k),k}$$

est un polynôme de degré égal au nombre de points fixes de la permutation σ , donc de degré strictement inférieur à n .

Dans la somme de ces termes ne figure qu'un seul terme égal à X^n , plus d'autres termes de degré strictement inférieur.

3. Tout est facile. Pour $(i) \iff (ii)$, on utilise le fait que pour toute matrice carrée M , la matrice M n'est pas inversible si et seulement si $\det(M) = 0$.

Pour l'équivalence $(ii) \iff (iii)$, on utilise le fait que si $f \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme sur un espace E de dimension finie, alors f est bijective si et seulement si f est

injective, par le théorème du rang. Il suffit alors d'utiliser l'équivalence entre le fait que l'endomorphisme f n'est pas bijectif et le fait que l'endomorphisme f est de noyau non réduit à $\{0\}$.

4. On utilise une récurrence.

Lorsque $k = 0$, on a : $A^0 X = X = \lambda^0 \cdot X$.

Supposons la formule $A^k X = \lambda^k \cdot X$ vraie pour un certain entier naturel k . Alors, en multipliant par A à gauche et en utilisant le fait que

$$(A - \lambda \cdot I_n)X = 0, \text{ donc } AX = \lambda \cdot X$$

alors :

$$A^{k+1}X = A(A^k X) = A(\lambda^k \cdot X) = \lambda^k \cdot AX = \lambda^k \cdot (\lambda \cdot X) = \lambda^{k+1} \cdot X.$$

Maintenant, si $Q(X) = \sum_{k=0}^d a_k \cdot X^k$ est un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$, alors :

$$Q(A)X = \sum_{k=0}^d a_k \cdot A^k X = \sum_{k=0}^d a_k \cdot \lambda^k \cdot X = Q(\lambda) \cdot X.$$

5. (a) Soit $Q(X)$ un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$.

Alors,

$$\begin{aligned} 0 &= Q(A)0 \\ &= Q(A)(X_1 + \cdots + X_r) \\ &= \sum_{k=1}^r Q(A)X_k \\ &= \sum_{k=1}^r Q(\lambda_k) \cdot X_k. \end{aligned}$$

(b) On choisit les polynômes de Lagrange $L_1, \dots, L_r$ associés aux complexes différents $\lambda_1, \dots, \lambda_r$.

On fixe un indice i entre 1 et r . En appliquant la question précédente au polynôme $Q(X) = L_i(X)$, l'écriture :

$$\sum_{k=1}^r L_i(\lambda_k) \cdot X_k = 0,$$

devient : $X_i = 0$.

6. Supposons que la matrice A admette n valeurs propres différentes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Par le lemme des noyaux, la somme

$$\sum_{k=1}^n E_{\lambda_k}(A)$$

est directe.

De plus, par définition des espaces propres, chaque espace $E_{\lambda_k}(A)$ n'est pas réduit à $\{0\}$, donc contient un vecteur non nul X_k .

Comme la somme des espaces propres est directe, alors la famille $\mathcal{C} = (X_1, \dots, X_n)$ est une famille libre, donc une base de vecteurs propres dans l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ de dimension n . La matrice P de passage de la base canonique vers cette base $\mathcal{C}$ nous donne une matrice inversible vérifiant que la matrice $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale, de coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

La réciproque est fausse. La matrice nulle est diagonalisable car diagonale et son polynôme caractéristique vaut :

$$\chi_0(X) = X^n$$

lequel n'est pas scindé à racines simples.

7. (a) En faisant le calcul après développement par rapport à la première colonne par exemple, on obtient :

$$\chi_A(X) = (X - 1)(X - 2)(X + 4).$$

- (b) La matrice A admet trois valeurs propres : 1, 2 et -4 . Elle est diagonalisable par la question **Q.6**.

- (c) On détaille pour une base de $E_1(A)$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ une matrice colonne.

On a successivement :

$$\begin{aligned} AX = X &\iff \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ 3x - 3y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} \\ &\iff x = y = z \\ &\iff X = z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\iff X \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Une base de $E_1(A)$ est $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

De même, une base de $E_2(A)$ est $\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$ et une base de $E_{-4}(A)$ est $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$.

- (d) La matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

convient.

8. (a) Il n'y a presque rien à faire. Toute matrice dans $\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ est déjà diagonale, donc diagonalisable et a fortiori trigonalisable.
- (b) Le polynôme caractéristique $\chi_A(X)$ est unitaire de degré $(n + 1)$. Il admet une racine complexe λ , qui est donc une valeur propre de la matrice A . On trouve donc un vecteur propre X (non nul par définition) associé. Ce vecteur X répond à la question.
- (c) C'est évident.
- (d) Appliquons l'hypothèse de récurrence avec la matrice B . Il existe une matrice $S \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que la matrice :

$$T = S^{-1}BS \text{ soit triangulaire supérieure.}$$

On pose maintenant la matrice :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C}).$$

Il est facile de voir que $\det(R) = \det(S) \neq 0$ et que la matrice inversible R est d'inverse :

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{pmatrix}.$$

On en déduit par produit matriciel par blocs :

$$R^{-1}A'R = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & S^{-1}BS = T \end{pmatrix},$$

qui est une matrice triangulaire supérieure.

La matrice A est semblable à la matrice A' elle-même semblable à une triangulaire supérieure. Par transitivité de la relation de similitude, la matrice A est bien trigonalisable. On a l'assertion $\mathcal{P}(n + 1)$.

9. On calcule le polynôme caractéristique. On trouve :

$$\chi_A(X) = (X + 1)(X - 1)^2.$$

On prend :

$$a = -1 \text{ et } b = 1.$$

En effet, deux matrices semblables doivent avoir le même polynôme caractéristique et celui de la matrice proposé vaut $(X - a)(X - b)^2$.

La matrice A admet deux espaces propres : $E_{-1}(A)$ de base $X_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ et $E_1(A)$

de base $X_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

On cherche une base (e_1, e_2, e_3) telle que :

$$\begin{cases} A(e_1) = -e_1 \\ A(e_2) = e_2 \\ A(e_3) = e_2 + e_3 \end{cases} .$$

Le vecteur $e_1 = X_1$ convient. La matrice

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

est de rang deux et son noyau est de base (X_2) . On remarque que X_2 est dans l'image de $A - I_3$ et que :

$$(A - I_3) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = X_2.$$

Les vecteurs $e_2 = X_2$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ conviennent.

Une matrice inversible P convenable est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$