

Travaux dirigés sur les déterminants

Problème : réduction des matrices par le polynôme caractéristique

On considère dans la suite un entier $n \geq 1$, puis A une matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On considère la fonction :

$$\chi_A : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ \lambda & \longmapsto \det(\lambda \cdot I_n - A) \end{cases} .$$

1. Montrer que la fonction $\chi_A : \lambda \longmapsto \chi_A(\lambda)$ est polynomiale.

Dans la suite, on notera $\chi_A(X) = \det(X \cdot I_n - A)$ le déterminant de la matrice $X \cdot I_n - A$ dont les coefficients appartiennent au corps $\mathbb{C}(X)$. Il est facile de voir que le déterminant $\chi_A(X)$ qui appartient a priori à $\mathbb{C}(X)$, appartient en fait à $\mathbb{C}[X]$. Le polynôme $\chi_A(X)$ s'appelle le **polynôme caractéristique de la matrice A** .

Les racines $\lambda \in \mathbb{C}$ du polynôme caractéristique sont appelées les **valeurs propres de la matrice A** .

2. Montrer que le polynôme caractéristique est un polynôme unitaire de degré égal à n .
3. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer l'équivalence entre les trois assertions suivantes :
 - (i) le complexe λ est une valeur propre de la matrice A
 - (ii) la matrice $A - \lambda \cdot I_n$ n'est pas inversible
 - (iii) le noyau $\text{Ker}(A - \lambda \cdot I_n)$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

On appelle **spectre de la matrice A** , l'ensemble que l'on note $\text{Sp}(A)$ des racines du polynôme caractéristique. Il s'agit d'un ensemble fini de cardinal inférieur ou égal à n .

Pour toute valeur propre $\lambda \in \text{Sp}(A)$, on appelle **espace propre associé à la valeur propre λ** , l'espace :

$$E_\lambda(A) = \text{Ker}(A - \lambda \cdot I_n).$$

Cet espace propre n'est pas réduit à $\{0\}$. On appelle **vecteur propre associé à la valeur propre λ** , tout vecteur non nul dans $E_\lambda(A)$.

4. Soient $\lambda \in \text{Sp}(A)$, puis $X \in E_\lambda(A)$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$A^k X = \lambda^k \cdot X,$$

puis que pour tout polynôme $Q(X) \in \mathbb{C}[X]$,

$$Q(A)X = Q(\lambda) \cdot X.$$

Le but des questions suivantes est de montrer le **lemme des noyaux** :

« Si $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont des valeurs propres différentes de la matrice A , alors la somme :

$$\sum_{k=1}^r E_{\lambda_k}(A) \text{ est directe. »}$$

5. On considère des valeurs propres différentes $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ de la matrice A . On considère des vecteurs $X_1, \dots, X_r$ respectivement dans $E_{\lambda_1}(A), \dots, E_{\lambda_r}(A)$, de somme nulle :

$$X_1 + \dots + X_r = 0.$$

- (a) Montrer que pour tout polynôme $Q(X) \in \mathbb{C}[X]$,

$$\sum_{k=1}^r Q(\lambda_k) \cdot X_k = 0.$$

- (b) En déduire que chaque vecteur $X_1, \dots, X_r$ est nul.

On dit que la matrice A est **diagonalisable**, s'il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que la matrice $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale.

On dit que la matrice A est **trigonalisable**, s'il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que la matrice $P^{-1}AP$ soit une matrice triangulaire supérieure.

6. Montrer que si la matrice A admet n valeurs propres différentes, alors elle est diagonalisable. La réciproque est-elle vraie ?
7. On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calculer le polynôme caractéristique $\chi_A(X)$.
- (b) En déduire que la matrice A est diagonalisable.
- (c) Déterminer une base de chaque espace propre.
- (d) Expliciter une matrice inversible P telle que :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Le but des questions suivantes est de démontrer la propriété suivante :

« Toute matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable. »

Pour ce faire, on procède par récurrence en notant l'assertion de récurrence :

$\mathcal{P}(n)$: « pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que la matrice $P^{-1}AP$ soit une matrice triangulaire supérieure. ».

8. (a) Montrer que l'assertion $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

(b) On suppose l'assertion $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier $n \geq 1$. On considère alors une matrice $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$.

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ et un vecteur colonne X non nul dans $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{C})$ tel que :

$$AX = \lambda \cdot X.$$

(c) On complète la famille libre (X) en une base $\mathcal{B} = (X, e_2, \dots, e_{n+1})$ de $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{C})$. On note Q la matrice de passage de la base canonique vers la base $\mathcal{B}$. Montrer que la matrice $A' = Q^{-1}AQ$ est de la forme :

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda & L \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

avec $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(d) En utilisant l'hypothèse de récurrence sur la matrice B , montrer l'assertion $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

9. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Expliciter des complexes a et b et une matrice inversible P tel que :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$
