Travaux dirigés sur les espaces euclidiens – corrigé –

Problème : la séparation des convexes

Partie I : distance à une partie convexe

1. L'ensemble $\mathscr{D}_x$ est non vide car l'ensemble A n'est pas vide. De plus, l'ensemble $\mathscr{D}_x$ est inclus dans $[0, +\infty[$. Cet ensemble admet donc bien une borne inférieure.
2. (a) Par inégalité triangulaire, on a :
$$\|x - a\| \leqslant \|x - y\| + \|y - a\|.$$
   (b) Comme le nombre $d(x, A)$ minore l'ensemble $\mathscr{D}_x$ et que $\|x - a\| \in \mathscr{D}_x$, alors :
$$d(x, A) \leqslant \|x - a\| \leqslant \|x - y\| + \|y - a\|.$$
   (c) On en déduit :
$$d(x, A) - \|x - y\| \leqslant \|y - a\|.$$
   On voit que le nombre $d(x, A) - \|x - y\|$ minore l'ensemble $\mathscr{D}_y$, car l'inégalité précédente a lieu pour tout élément $a \in A$. Conclusion,
$$d(x, A) - \|x - y\| \leqslant d(y, A).$$
   On aurait pu aussi utiliser le fait que la borne inférieure $d(y, A)$ est dans l'adhérence de l'ensemble $\mathscr{D}_y$ pour terminer par un passage à la limite.
3. La question **Q.2** montre que :
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ d(x, A) - d(y, A) \leqslant \|x - y\|.$$
En intervertissant les rôles des variables x et y, on obtient :
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ -\|x - y\| \leqslant d(x, A) - d(y, A) \leqslant \|x - y\|.$$
On obtient alors que pour tous éléments x et y dans $\mathbb{R}^n$,
$$\Big| d(x, A) - d(y, A) \Big| \leqslant \|x - y\|.$$

4. La réponse est non ! En effet, la fonction :

$$f : x \longmapsto 1$$

est 1-lipschitzienne. Cependant, pour toute partie A non vide de $\mathbb{R}^n$, en prenant $x \in A$, alors $d(x, A) \leqslant \|x - x\| = 0$ et donc $d(x, A) = 0$. Cependant, $f(x) = 1 \neq 0$.
En fait, toutes les fonctions d_A s'annulent en au moins un point. Toute fonction 1-lipschitzienne ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}^n$ donne un contre-exemple.

5. On démontre le théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}^n$.
Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite bornée par $C > 0$ dans $\mathbb{R}^n$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_k = (u_{k,1}, \cdots , u_{k,n}).$$

Pour tout $v = (v_1, \cdots , v_n) \in \mathbb{R}^n$, on sait que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ |v_i| = \sqrt{v_i^2} \leqslant \sqrt{\sum_{j=1}^{n} v_j^2} = \|v\|.$$

La suite à coefficients réels $(u_{k,1})_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée par C.
On trouve une extractrice $\varphi_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que la sous-suite $(u_{\varphi_1(k),1})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_1.
La suite $(u_{\varphi_1(k),2})_{k\in\mathbb{N}}$ reste bornée par C. On trouve une extractrice $\varphi_2 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que la sous-suite

$$\left(u_{\varphi_1\circ\varphi_2(k),2}\right)_{k\in\mathbb{N}}$$

converge vers ℓ_2.
Si pour un certain entier $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a construit des extractrices $\varphi_1, \cdots , \varphi_k$ telles que pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, en posant l'extractrice :

$$\psi_i : \ell \longmapsto \varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_i(\ell)$$

la sous-suite $(u_{\psi_i(\ell),i})_{\ell\in\mathbb{N}}$ soit convergente vers le réel ℓ_i, alors la suite $(u_{\psi_k(\ell),k+1})_{\ell\in\mathbb{N}}$ est bornée. On trouve une extractrice $\varphi_{k+1} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que la sous-suite :

$$(u_{\psi_k\circ\varphi_{k+1}(\ell),k+1})_{\ell\in\mathbb{N}}$$

converge vers un réel ℓ_{k+1}.
Conclusion, par récurrence, on dispose d'une extractrice $\chi = \psi_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la sous-suite $(u_{\chi(n),i})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de la suite convergente $(u_{\psi_i(n),i})_{n\in\mathbb{N}}$, de limite ℓ_i.
Il est alors facile de voir que :

$$\lim_{k\longrightarrow+\infty} \left\| u_{\chi(k)} - (\ell_1, \cdots , \ell_k) \right\| = 0.$$

On vient de construire une sous-suite de la suite bornée u, cette sous-suite étant convergente.

On revient à la question posée.

Par caractérisation de la borne inférieure, il existe une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments dans A telle que :

$$\lim_{k\longrightarrow+\infty} \|x-a_k\| = d(x,A).$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|a_k\| \leqslant \|x-a_k\| + \|x\|.$$

La suite $\Big(\|x-a_k\|\Big)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente donc est bornée par une constante $C>0$. La suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est donc bornée par $C+\|x\|$. On peut extraire de la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergente $(a_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ de limite ℓ. Ce vecteur ℓ appartient encore au fermé A. La norme est 1-lipschitzienne donc continue :

$$\|x-\ell\| = \lim_{k\longrightarrow+\infty} \|x-a_{\varphi(k)}\| = d(x,A).$$

La distance est atteinte en un point ℓ de A.

6. D'après la question **Q.5**, la distance est atteinte en un point $a \in A$.
Supposons que la distance soit aussi atteinte en un autre point $b \in A$.
Le milieu $c = \dfrac{a+b}{2}$ appartient encore au convexe A.
On en déduit par minimalité de la distance :

$$\begin{aligned}
d(x,A) &\leqslant \left\|x-\frac{a+b}{2}\right\| \\
&= \frac{1}{2}\Big\|(x-a)+(x-b)\Big\| \\
&\leqslant \frac{1}{2}\left(\|x-a\|+\|x-b\|\right) \\
&\leqslant \frac{1}{2}\Big(d(x,A)+d(x,A)\Big) \\
&= d(x,A).
\end{aligned}$$

Les inégalités précédentes sont toutes des égalités. On a donc l'égalité triangulaire :

$$\|x-a+x-b\| = \|x-a\| + \|x-b\|.$$

Les vecteurs $x-a$ et $x-b$ sont colinéaires et de même sens. Comme ces deux vecteurs ont la même norme égale à $d(x,A)$, ces deux vecteurs sont égaux et $a=b$.

7. (a) Soit b un élément de A. Pour tout $\lambda\in[0,1]$, le point :

$$c_\lambda = \pi(x) + \lambda\cdot(b-\pi(x)) \text{ appartient encore au convexe } A.$$

On en déduit :

$$\forall \lambda\in[0,1],\ \|x-\pi(x)\|^2 \leqslant \|x-c_\lambda\|^2.$$

En développant le tout, on obtient que la fonction :

$$f : \left|\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \lambda & \longmapsto & \|x-c_\lambda\|^2 - \|x-\pi(x)\|^2 \end{array}\right.$$

est égale :

$$f : \lambda \longmapsto -2\lambda \cdot \langle b - \pi(x), x - \pi(x)\rangle + \lambda^2 \cdot \|b - \pi(x)\|^2.$$

La fonction f est dérivable, à valeurs positives et $f(0) = 0$. On en déduit :

$$f'(0) = \lim_{\lambda \longrightarrow 0^+} \frac{f(\lambda)}{\lambda} \geqslant 0.$$

Or,

$$f' : \lambda \longmapsto -2\langle b - \pi(x), x - \pi(x)\rangle + 2\lambda \cdot \|b - \pi(x)\|^2.$$

On en déduit :

$$f'(0) = -2\langle b - \pi(x), x - \pi(x)\rangle,$$

amenant à la conclusion souhaitée.

(b) L'inégalité $\langle \pi(x) - \pi(y), \pi(x) - \pi(y)\rangle = \|\pi(x) - \pi(y)\|^2 \geqslant 0$ a lieu grâce à la positivité du produit scalaire.

Pour l'inégalité de gauche, il suffit de montrer que :

$$\langle \pi(x) - \pi(y), x - y - \pi(x) + \pi(y)\rangle \geqslant 0.$$

Or, en utilisant la question précédente pour $b = \pi(y)$, on peut écrire :

$$\langle \pi(y) - \pi(x), x - \pi(x)\rangle \leqslant 0, \text{ donc } \langle \pi(x) - \pi(y), x - \pi(x)\rangle \geqslant 0 \qquad [\text{inégalité } \bigstar].$$

De même, en appliquant la question précédente pour le vecteur y au lieu de x et pour $b = \pi(x)$, alors :

$$\langle \pi(x) - \pi(y), y - \pi(y)\rangle \leqslant 0.$$

Ainsi,

$$\langle \pi(x) - \pi(y), \pi(y) - y\rangle \geqslant 0 \qquad [\text{inégalité } ⬟].$$

En sommant les inégalités $\bigstar$ et ⬟, on obtient ce qu'il faut, par linéarité du produit scalaire par rapport à la deuxième variable.

(c) On utilise l'inégalité précédente et on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\|\pi(x) - \pi(y)\|^2 \leqslant \langle \pi(x) - \pi(y), x - y\rangle \leqslant \|\pi(x) - \pi(y)\| \cdot \|x - y\| \qquad [\text{inégalité } \bigstar].$$

Si $\pi(x) = \pi(y)$, alors l'inégalité voulue est vérifiée trivialement.

Si $\pi(x) \neq \pi(y)$, alors on peut diviser dans $\bigstar$ par $\|\pi(x) - \pi(y)\| > 0$, ce qui donne exactement ce qu'il faut.

Partie II : hyperplans affines et séparations

8. • On suppose la première assertion. L'ensemble H est donc de la forme :

$$H = a + \vec{u}^{\perp},$$

pour un vecteur $\vec{u}$ non nul et un point a de $\mathbb{R}^n$.
On pose la forme linéaire :

$$\varphi : x \longmapsto \langle x, \vec{u} \rangle.$$

On pose $\alpha = \langle a \mid \vec{u} \rangle = \varphi(a)$.
On montre l'égalité $H = \Big\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) = \alpha \Big\}$ par double inclusion.
Soit x dans H. On pose $x = a + \vec{v}$, avec $\vec{v}$ un vecteur orthogonal au vecteur $\vec{u}$. On en déduit :

$$\varphi(x) = \varphi(a) + \varphi(\vec{v}) = \varphi(a) = \alpha.$$

Réciproquement soit x dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(x) = \alpha$.
On pose le vecteur $\vec{v} = x - a$, de sorte que $x = a + \vec{v}$. De plus,

$$\varphi(\vec{v}) = \varphi(x) - \varphi(a) = \alpha - \alpha = 0.$$

Le vecteur $\vec{v}$ est bien orthogonal au vecteur $\vec{u}$ et x appartient bien à l'ensemble H.

• Réciproquement, on suppose la deuxième assertion. On reprend les notations utilisées dans l'énoncé pour cette assertion.
Par le théorème de Riesz, on sait qu'il existe un vecteur $\vec{u}$ tel que :

$$\varphi : x \longmapsto \langle x, \vec{u} \rangle.$$

Le vecteur $\vec{u}$ est non nul puisque la forme linéaire φ est non nulle.
La forme linéaire φ est surjective car l'espace image $\mathrm{Im}(\varphi)$ ne peut être réduit à $\{0\}$, donc ne peut être égal qu'à l'espace $\mathbb{R}$.
Il existe un point $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(a) = \alpha$.
On montre alors que $H = a + \vec{u}^{\perp}$ par double inclusion.
Soit x dans H. On pose $\vec{v} = x - a$.
On en déduit :

$$\varphi(\vec{v}) = \varphi(x) - \varphi(a) = \alpha - \alpha = 0.$$

Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{u}$ sont donc orthogonaux.
Soit finalement x dans $\mathbb{R}^n$ tel que x appartienne à l'ensemble $a + \vec{u}^{\perp}$. On écrit :

$$x = a + \vec{v} \text{ , avec } \vec{v} \text{ orthogonal à } \vec{u}.$$

On en déduit :

$$\varphi(x) = \varphi(a) + \varphi(\vec{v}) = \varphi(a) = \alpha.$$

L'ensemble H est bien un hyperplan affine.

9. La question précédente montre qu'en posant H les hyperplans affines :

$$\left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) = \alpha\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \psi(x) = \beta\right\}$$

où $H = a + \vec{u}^\perp$, alors les noyaux $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Ker}(\psi)$ sont égaux à $\vec{u}^\perp$.
On considère un vecteur $y \in \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{Ker}(\varphi)$. On sait alors que :

$$\mathrm{Ker}(\varphi) + \oplus \mathrm{Vect}(y) = \mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(\psi) + \oplus \mathrm{Vect}(y).$$

On pose :

$$\lambda = \varphi(y) \text{ et } \mu = \psi(y)$$

qui sont deux scalaires non nuls, car $y \notin \mathrm{Ker}(\varphi)$ et $y \notin \mathrm{Ker}(\psi)$.
Les applications linéaires ψ et $\dfrac{\mu}{\lambda} \cdot \varphi$ coïncident sur $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et en y, donc partout.
Les formes linéaires φ et ψ sont bien colinéaires.

10. Considérons les parties :

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leqslant 0\right\} \text{ et } B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ et } y \geqslant \frac{1}{x}\right\}.$$

L'ensemble A est le demi-plan en dessous de l'axe des abscisses : c'est clairement convexe.
De plus, cet ensemble A est bien fermé. En effet, si $((x_k, y_k))_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de A qui converge vers $\ell = (\alpha, \beta)$, alors :

$$\lim_{k \longrightarrow +\infty} y_k = \beta.$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on sait que l'ordonnée y_k est négative. En passage à la limite lorsque k tend vers $+\infty$ dans l'inégalité $y_k \leqslant 0$, on obtient :

$$\beta \leqslant 0 \text{ et } \ell = (\alpha, \beta) \in A.$$

L'ensemble B est l'épigraphe de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ définie sur $]0, +\infty[$. Cette fonction est deux fois dérivable et de derivée seconde :

$$f'' : x \longmapsto \frac{2}{x^3} > 0.$$

La fonction f est donc convexe et son épigraphe également.
De plus, cet ensemble B est encore fermé. En effet, si $((x_k, y_k))_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de B qui converge vers $\ell = (\alpha, \beta)$, en passant àa la limite lorsque k tend vers $+\infty$ dans les inégalités :

$$x_k > 0 \text{ et } x_k \cdot y_k \geqslant 1,$$

on obtient :

$$\alpha \geqslant 0 \text{ et } \alpha \cdot \beta \geqslant 1,$$

ce qui impose en outre $\alpha \neq 0$, donc la limite $\ell = (\alpha, \beta)$ reste dans l'ensemble B.

Il est impossible de séparer strictement ces deux ensembles disjoints par un hyperplan affine. En effet, dans le cas contraire, on disposerait d'une forme linéaire $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, d'un réel α et d'un réel $\varepsilon > 0$ tels que par exemple :

$$\forall (a,b) \in A \times B,\ \varphi(a) \leqslant \alpha - \varepsilon < \alpha + \varepsilon \leqslant \varphi(b).$$

La forme linéaire φ est de la forme $(x,y) \longmapsto \langle (x,y), \vec{u} \rangle$, pour un certain vecteur $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^2$.
Choisissons finalement pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, les points :

$$a_k = (k,0) \in A \text{ et } b_n = \left(k, \frac{1}{k}\right) \in B.$$

Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\varphi(b_k) - \varphi(a_k) \geqslant 2\varepsilon > 0.$$

Cependant, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|\varphi(b_k) - \varphi(a_k)| = \Big| \langle b_k - a_k, \vec{u} \rangle \Big| \leqslant \|b_k - a_k\| \cdot \|\vec{u}\|,$$

qui est une quantité qui tend vers 0, lorsque k tend vers $+\infty$, car :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \|b_k - a_k\| = \frac{1}{k}.$$

Par passage à la limite dans l'inégalité

$$\varphi(b_k) - \varphi(a_k) \geqslant 2\varepsilon > 0,$$

on en déduit $0 \geqslant 2\varepsilon > 0$: contradiction.
Les deux convexes A et B ne sont pas séparables strictement.
Ils peuvent cependant être séparés par l'hyperplan affine :

$$H = \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \Big\}.$$

11. L'ensemble proposé est bien un hyperplan affine, le vecteur $\overrightarrow{x-a}$ ne pouvant être nul puisque $a \in A$ et $x \notin A$.
On pose la forme linéaire :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (t_1,t_2) & \longmapsto & \Big\langle (t_1,t_2), \overrightarrow{x-a} \Big\rangle \end{array} \right.$$

et $\alpha = \varphi\left(\dfrac{a+x}{2}\right)$, de sorte que pour tout $(t_1,t_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} (t_1,t_2) \in H \quad & \Longleftrightarrow \quad \left\langle (t_1,t_2) - \frac{a+x}{2}, \overrightarrow{x-a} \right\rangle = 0 \\ & \Longleftrightarrow \quad \varphi(t_1,t_2) - \alpha = 0 \\ & \Longleftrightarrow \quad \varphi(t_1,t_2) = \alpha. \end{aligned}$$

On montre maintenant que l'hyperplan affine H sépare strictement les ensembles A et $\{x\}$.
D'une part,

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \langle x, \overrightarrow{x-a}\rangle \\
&= \left\langle x - \frac{a+x}{2}, \overrightarrow{x-a}\right\rangle + \varphi\left(\frac{a+x}{2}\right) \\
&= \left\langle \frac{x-a}{2}, \overrightarrow{x-a}\right\rangle + \alpha \\
&= \frac{1}{2}\|\overrightarrow{x-a}\|^2 + \alpha.
\end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $b \in A$, d'après la question **7-(a)**,

$$\langle b-a, x-a\rangle \leqslant 0$$

donc :

$$\begin{aligned}
\varphi(b) &= \langle b, x-a\rangle \\
&\leqslant \langle a, x-a\rangle \\
&= \left\langle a - \frac{a+x}{2}, \overrightarrow{x-a}\right\rangle + \varphi\left(\frac{a+x}{2}\right) \\
&= \left\langle -\frac{x-a}{2}, \overrightarrow{x-a}\right\rangle + \alpha \\
&= -\frac{1}{2}\|\overrightarrow{x-a}\|^2 + \alpha.
\end{aligned}$$

En posant $\varepsilon = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{x-a}\|^2 > 0$, on obtient que :

$$\forall b \in A,\ \varphi(b) \leqslant \alpha - \varepsilon < \alpha + \varepsilon \leqslant \varphi(x).$$

On a bien la stricte séparation par cet hyperplan affine H.

12. (a) Soit x dans $\mathbb{R}^n$. Comme l'ensemble C est une partie ouverte contenant 0, il existe $\rho > 0$ tel que :

$$\forall h \in \mathbb{R}^n,\ \|h\| \leqslant \rho \Longrightarrow h \in C.$$

Si $x = 0$, alors pour tout $r > 0$, $\frac{x}{r} = 0 \in C$ et l'ensemble de l'énoncé est $]0, +\infty[$ qui admet 0 comme borne inférieure.
Si $x \neq 0$, en prenant $r = \frac{\|x\|}{\rho} > 0$, alors :

$$\left\|\frac{x}{r}\right\| = \rho, \text{ donc } \frac{x}{r} \in C.$$

L'ensemble considéré dans l'énoncé est inclus dans $\mathbb{R}$, est non vide et est minoré par 0, donc admet une borne inférieure également dans ce cas-là.

(b) Soient x dans $\mathbb{R}^n$ et λ un réel strictement positif.

Soit $r > 0$. Il est facile de voir que :

$$\frac{x}{r} \in C \iff \frac{\lambda \cdot x}{\lambda \cdot r} \in C.$$

Il existe une suite $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs tels que $\dfrac{x}{r_k} \in C$ et $\lim\limits_{k\longrightarrow+\infty} r_k = p(x)$.

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\lambda \cdot x}{\lambda \cdot r_k} \in C$, donc :

$$p(\lambda \cdot x) \leqslant \lambda \cdot r_k.$$

Par passage à la limite lorsque k tend vers $+\infty$, on obtient :

$$p(\lambda \cdot x) \leqslant \lambda \cdot p(x).$$

En remplaçant x par $y = \lambda \cdot x$ et λ par $\mu = \dfrac{1}{\lambda} > 0$, on obtiendrait de même :

$$p(\mu \cdot y) \leqslant \mu \cdot p(y) \text{ ou encore } p(x) \leqslant \frac{1}{\lambda} \cdot p(\lambda \cdot x),$$

d'où l'égalité demandée.

(c) i. Par définition de la borne inférieure $p(x)$ et comme $p(x) + \varepsilon > p(x)$, il existe $r \in [p(x), p(x) + \varepsilon[$ tel que :

$$\frac{x}{r} \in C.$$

En posant $\lambda = \dfrac{r}{p(x) + \varepsilon} \in [0, 1]$, alors :

$$\frac{x}{p(x) + \varepsilon} = \lambda \cdot \frac{x}{r} + (1 - \lambda) \cdot 0,$$

qui apparaît comme un barycentre à poids positifs de deux points du convexe C. Le point $\dfrac{x}{p(x) + \varepsilon}$ est bien dans l'ensemble C.

On fait de même pour le point $\dfrac{y}{p(y) + \varepsilon}$.

ii. Posons $\alpha = \dfrac{p(x) + \varepsilon}{p(x) + p(y) + 2\varepsilon} \in [0, 1]$. On en déduit $1 - \alpha = \dfrac{p(y) + \varepsilon}{p(x) + p(y) + 2\varepsilon}$, puis :

$$\frac{x + y}{p(x) + p(y) + 2\varepsilon} = \alpha \cdot \frac{x}{p(x) + \varepsilon} + (1 - \alpha) \cdot \frac{y}{p(y) + \varepsilon}.$$

Le point $\dfrac{x + y}{p(x) + p(y) + 2\varepsilon}$ est donc sur un segment reliant deux points du convexe C : ce point est dans C et par définition du la borne inférieure $p(x + y)$, on sait que :

$$p(x + y) \leqslant p(x) + p(y) + 2\varepsilon.$$

iii. Il suffit maintenant de faire tendre dans l'inégalité précédente le réel ε vers 0^+, ce qui amène à l'inégalité demandée.

iv. Soit x dans C. Il existe une boule fermée B centrée en x et de rayon $\rho > 0$ incluse dans C.

Si $x = 0$, alors $p(x) = 0 < 1$.

Si $x \neq 0$, alors le point $\left(1 + \dfrac{\rho}{\|x\|}\right) \cdot x$ est dans cette boule fermée B, donc appartient à C. On en déduit :

$$p(x) \leqslant \left(1 + \frac{\rho}{\|x\|}\right)^{-1} < 1.$$

Réciproquement, soit x dans $\mathbb{R}^n$ tel que $p(x) < 1$. Il existe $\alpha \in [p(x), 1[$ tel que $\dfrac{x}{\alpha}$ appartienne à C.

Le point x appartient au segment d'extrémités 0 et $\dfrac{x}{\alpha}$, puisque $\dfrac{1}{\alpha} > 1$. Le point x appartient donc au convexe C et on a la double inclusion.

13. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la boule $B\left(a, \dfrac{1}{k+1}\right)$ n'est pas incluse dans C ; il existe $x_k \notin C$ tel que :

$$\|x_k - a\| \leqslant \frac{1}{k+1}.$$

La suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ainsi construite convient.

(b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $a \in C$ et $x_k \notin C$; on pose le projeté $\pi(x_k) \in C$ sur le convexe fermé C. Chaque vecteur $x_k - \pi(x_k)$ est non nul. La suite de vecteurs $\left(\dfrac{x_k - \pi(x_k)}{\|x_k - \pi(x_k)\|}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans la sphère unité de centre 0 et de rayon 1 qui est fermée bornée.

Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut créer une sous-suite convergente vers un élément $\vec{u}$ de cette sphère, ce qui répond à la question.

(c) Soit $k \in \mathbb{N}$. Il suffit d'appliquer la question **Q-7(a)** pour avoir l'inégalité.

En appliquant l'inégalité à l'indice $\psi(k)$ puis en divisant par $\|x_{\psi(k)} - \pi(x_{\psi(k)})\| > 0$, on obtient :

$$\left\langle b - \pi(x_{\psi(k)}), \frac{x_{\psi(k)} - \pi(x_{\psi(k)})}{\|x_{\psi(k)} - \pi(x_{\psi(k)})\|} \right\rangle \leqslant 0.$$

L'application $y \longmapsto \pi(y)$ est 1-lipschitzienne comme le montre la question **Q-7(c)** et on peut passer à la limite lorsque k tend vers $+\infty$ dans l'inégalité large ci-dessus, ce qui donne ce qu'il faut puisque $\pi(x_{\psi(k)})$ converge vers $\pi(a) = a$, lorsque k tend vers $+\infty$.

(d) On pose $H = a + \vec{u}^{\perp}$, puis la forme linéaire $\varphi : x \longmapsto \langle x, \vec{u} \rangle$ et enfin $\alpha = \varphi(a)$.

La question précédente montre que :

$$\forall b \in C,\ \varphi(b) \leqslant \varphi(a).$$

Les ensembles C et $\{a\}$ sont donc séparables au sens large.

14. (a) Soient x et y dans C, λ dans $[0,1]$. On écrit :

$$x = a - b \text{ et } y = a' - b',$$

avec a et a' dans A et b', puis b' dans B.
Ainsi,

$$\lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot y = \Big(\lambda \cdot a + (1-\lambda) \cdot a'\Big) - \Big(\lambda \cdot b + (1-\lambda) \cdot b'\Big).$$

Par convexité des ensembles A et B, le point $\lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot y$ apparaît bien comme une différence entre deux éléments de A et B respectivement.

(b) Si C contenait 0, il existerait $a \in A$ et $b \in B$ tel que $a - b = 0$, donc $a = b$ appartiendrait à l'intersection $A \cap B = \emptyset$, ce qui est faux.

(c) Soient x et y dans $\overline{C}$. Soit $\lambda \in [0,1]$.
On trouve une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de C convergeant vers x. On trouve une suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de C convergeant vers y.
La suite $\Big(\lambda \cdot x_k + (1-\lambda) \cdot y_k\Big)_{k\in\mathbb{N}}$ est à éléments dans C et converge vers $\lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot y$.
Ce dernier point appartient donc à l'adhérence $\overline{C}$, qui est bien convexe.

(d) Supposons par l'absurde que le point 0 appartienne à l'intérieur de $\overline{C}$.
Il existe $r > 0$ tel que :

$$\forall h \in \mathbb{R}^n,\ \|h\| \leqslant r \Longrightarrow j = h \in \overline{C}.$$

En notant $(e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, alors les points $\dfrac{r}{\sqrt{n}} \cdot (\pm e_1, \cdots, \pm e_n)$ sont de norme euclidienne égale à r et appartiennent donc à $\overline{C}$.
On trouve pour chaque tel point $p = (p_1, \cdots, p_n)$ où les p_i sont non nuls, un point $(c_1, \cdots, c_n)$ de C tel que chaque composante c_i est non nulle et de même signe que p_i.
On vient de trouver 2^n points du convexe C dont les composantes sont toutes non nulles et qui correspondent à toutes les 2^n situations de répartition de signes possibles.
On montre par récurrence sur l'entier n l'assertion suivante :

$\mathscr{P}(n)$: « soit D un ensemble de 2^n points de $\mathbb{R}^n$ dont les composantes sont non nulles et tel que si $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n$, alors il existe un point $(a_1, \cdots, a_n)$ de D tel que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, le produit $a_i \times \varepsilon_i$ est strictement positif.
Alors, le point 0 appartient à l'enveloppe convexe de D. »

• initialisation : lorsque $n = 1$, soit D une partie de 2 points de $\mathbb{R}$ contenant deux réels a et b avec $a < 0 < b$. Il est alors clair que $0 \in [a,b]$, le segment $[a,b]$ étant l'enveloppe convexe de D dans ce cas.
• hérédité : supposons le résultat vrai en dimension n.
Soit D une partie de $\mathbb{R}^{n+1}$ comportant 2^{n+1} points avec toutes les répartitions de signes adéquats. Dans la suite, on notera $\mathscr{D}$ l'enveloppe convexe de l'ensemble D.
Soit $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ un élément de $\{-1,1\}^n$.

On trouve dans l'ensemble D deux points

$$a = (a_1, \cdots, a_n, a_{n+1}) \text{ et } b = (b_1, \cdots, b_n, b_{n+1})$$

tels que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, le signe de a_i est celui de ε_i et le signe de b_i est encore celui de ε_i. On a de plus par exemple $a_{n+1} < 0 < b_{n+1}$.
On prend le point :

$$c = \frac{1}{b_{n+1} + |a_{n+1}|} \cdot \Big(b_{n+1} \cdot a + |a_{n+1}| \cdot b \Big).$$

Ce point c appartient à l'enveloppe $\mathscr{D}$. De plus, le point c est un $(n+1)$-uplet de la forme :

$$c = (c_1, \cdots, c_n, 0).$$

De plus, par construction, chaque c_i pour $i \in [\![1, n]\!]$ est du signe de a_i ou b_i, c'est-à-dire du signe de ε_i.
On vient de construire 2^n points de $\mathscr{D}$, ces 2^n points appartenant à $\mathrm{Ker}(e_{n+1}^*)$ (ensemble des vecteurs à dernière composante nulle) et toutes les 2^n répartitions de signe sont représentées à travers ces 2^n points. Ces 2^n points forment la partie $\mathscr{F}$ de $\mathscr{D}$.
On projète ces points via la projection linéaire :

$$p : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) & \longmapsto & (x_1, \cdots, x_n) \end{array} \right. .$$

Par hypothèse de récurrence appliquée dans $\mathbb{R}^n$ à l'ensemble $p(\mathscr{F})$, l'enveloppe convexe de $p(\mathscr{F})$ contient $0 \in \mathbb{R}^n$.
On peut écrire :

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot p(f_i),$$

où chaque λ_i est positif, chaque f_i est dans $\mathscr{F}$ et la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ vaut 1.

Le point $q = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot f_i$ appartient à l'enveloppe convexe de la partie $\mathscr{F}$, donc appartient à l'enveloppe $\mathscr{D}$. De plus, ce point q est à dernière composante nulle et par linéaire de l'application p, on a :

$$p(q) = 0.$$

Le point q est en fait le point 0 de $\mathbb{R}^{n+1}$.
Ce point 0 appartient bien à l'enveloppe $\mathscr{D}$.

On revient à notre problème initial.
Le point 0 appartient finalement au convexe C, ce qui est en contradiction avec le résultat de la question **Q.14-(b)**.
Conclusion, le point 0 n'appartient pas à l'intérieur de $\overline{C}$.

(e) On distingue deux cas :
   - si $0 \in \overline{C}$, on peut appliquer la question **Q.13** au convexe fermé $\overline{C}$ et on peut séparer $\overline{C}$ et $\{0\}$ par un hyperplan affine H.
     Cet hyperplan affine H sépare donc les convexes C et $\{0\}$.
   - si $0 \notin \overline{C}$, on utilise alors la question **Q.11** qui permet de séparer strictement $\{0\}$ de $\overline{C}$. Là encore, on est ramené à la même conclusion.

(f) Il existe une forme linéaire $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que par exemple :

$$\forall c \in C,\ \varphi(c) \leqslant \alpha \leqslant \varphi(0).$$

Puisque $\varphi(0) = 0$, alors $\alpha \leqslant 0$ et :

$$\forall c \in C,\ \varphi(c) \leqslant 0.$$

On en déduit :

$$\forall (a,b) \in A \times B,\ \varphi(a-b) \leqslant 0 \text{ et } \varphi(a) \leqslant \varphi(b).$$

On vient de séparer au sens large les convexes A et B.

15. (a) L'application

$$g : \left| \begin{array}{ccc} A \times B & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (a,b) & \longmapsto & \|a-b\| \end{array} \right.$$

est continue car 1-lipschitzienne et l'ensemble $A \times B$ est un fermé borné.

Par le théorème des bornes atteintes en dimension finie (l'ensemble $A \times B$ est inclus dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ de dimension $2n$), l'application g atteint une valeur minimale en un couple $(a,b) \in A \times B$ qui répond à la question.

(b) On en déduit que pour tout $y \in B$,

$$\|a-b\| \leqslant \|a-y\|.$$

On en déduit que :

$$\|a-b\| = d(a,B).$$

D'après la question **Q.11**, en notant l'hyperplan affine :

$$H = \frac{a+b}{2} + \overrightarrow{b-a}^{\perp}$$

alors cet hyperplan sépare strictement le singleton $\{a\}$ et le convexe B.

On peut inverser les rôles des variables a et b. L'interversion des rôles ne modifie en rien la définition de l'hyperplan H qui sépare maintenant strictement le singleton $\{b\}$ du convexe A.

On en déduit que cet hyperplan H sépare strictement les convexes A et B.