Travaux dirigés sur les espaces euclidiens

Problème : la séparation des convexes

Dans tout le problème, on travaille dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire habituel, l'entier n étant supérieur ou égal à 1. On notera $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ce produit scalaire et $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée.

Partie I : distance à une partie convexe

On considère ici une partie non vide A de $\mathbb{R}^n$, convexe.

1. Soit x dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'ensemble
$$\mathscr{D}_x = \Big\{ \Big\| x - a \Big\| \ ; \ a \in A \Big\}$$
admet une borne inférieure.

Cette borne inférieure est notée $d(x, A)$ et est appelée la ***distance de x à la partie A***.

2. Soient x et y dans $\mathbb{R}^n$. Soit a dans A.
   (a) Comparer $\|x - a\|$ à $\|x - y\| + \|y - a\|$.
   (b) Comparer $d(x, A)$ à $\|x - y\| + \|y - a\|$.
   (c) Comparer $d(x, A)$ à $\|x - y\| + d(y, A)$.
3. En déduire que la fonction :
$$d_A : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & d(x, A) \end{array} \right.$$
est 1-lipschitzienne.
4. Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, +\infty[$ une fonction 1-lipschitzienne. Existe-t-il une partie A non vide de $\mathbb{R}^n$ telle que $f = d_A$?
5. On suppose que l'ensemble A est de plus fermé. Soit x dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que la distance $d(x, A)$ est atteinte en un point a de A.
[indication : on pourra établir en premier lieu un théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}^n$.]
6. On suppose que l'ensemble non vide A est à la fois fermé et convexe. Soit x dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que la distance $d(x, A)$ est atteinte en un seul point $a \in A$.
[indication : on pourra considérer le milieu $\dfrac{a+b}{2}$.]

Ce seul point $a \in A$ est appelé ***projeté du point x sur le convexe fermé A*** et noté $\pi(x)$ dans la suite.

7. Soit A un convexe non vide et fermé. Soient x et y dans $\mathbb{R}^n$.
   (a) Montrer que pour tout $b \in A$,
   $$\langle b - \pi(x), x - \pi(x) \rangle \leqslant 0.$$
   (b) En déduire que :
   $$\langle \pi(x) - \pi(y), x - y \rangle \geqslant \langle \pi(x) - \pi(y), \pi(x) - \pi(y) \rangle \geqslant 0.$$
   (c) En déduire finalement que
   $$\|\pi(x) - \pi(y)\| \leqslant \|x - y\|.$$

Partie II : hyperplans affines et séparations

On appelle ***hyperplan affine***, toute partie H de $\mathbb{R}^n$ de la forme :
$$H = a + \vec{u}^{\perp} = \left\{ a + \vec{v} \; ; \; \vec{v} \in \vec{u}^{\perp} \right\}$$
pour un certain vecteur non nul $\vec{u}$.

8. Soit H une partie du plan. Montrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes :
   - l'ensemble H est un hyperplan affine
   - il existe une forme linéaire $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ non nulle et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :
   $$H = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) = \alpha \right\}.$$
9. Montrer que si φ et ψ sont deux formes linéaires non nulles dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telles qu'il existe α et β vérifiant :
   $$\left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) = \alpha \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \psi(x) = \beta \right\}$$
   alors les formes linéaires φ et ψ sont colinéaires.

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}^n$. Soit H un hyperplan affine donné par l'ensemble :
$$H = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) = \alpha \right\},$$
où $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire non nulle et α est dans $\mathbb{R}$.
On dit que les parties A et B sont ***séparées au sens large par l'hyperplan affine H*** si :
$$\forall (a, b) \in A \times B, \; \varphi(a) \leqslant \alpha \leqslant \varphi(b)$$
ou :
$$\forall (a, b) \in A \times B, \; \varphi(a) \geqslant \alpha \geqslant \varphi(b).$$
On dit que les parties A et B sont ***séparées au sens strict par l'hyperplan affine H*** s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :
$$\forall (a, b) \in A \times B, \; \varphi(a) \leqslant \alpha - \varepsilon < \alpha + \varepsilon \leqslant \varphi(b)$$
ou :
$$\forall (a, b) \in A \times B, \; \varphi(a) \geqslant \alpha + \varepsilon > \alpha - \varepsilon \geqslant \varphi(b).$$

10. Donner dans $\mathbb{R}^2$ habituel deux ensembles convexes non vides, fermés et disjoints qui peuvent être séparés au sens large par un hyperplan affine, mais pas au sens strict.
11. Soient A une partie convexe, non vide et fermée dans $\mathbb{R}^n$, puis $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$. On note $a = \pi(x) \in A$ le seul élément de A minimisant la distance avec x. Montrer que l'hyperplan affine
$$H = \frac{a+x}{2} + \overrightarrow{x-a}^{\perp}$$
sépare strictement les parties A et $\{x\}$.
12. Soit C une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$, convexe et contenant 0.
    (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, l'ensemble
    $$\left\{r > 0 \mid \frac{x}{r} \in C\right\}$$
    est non vide et admet donc une borne inférieure que l'on note $p(x)$.
    (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $\lambda > 0$,
    $$p(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot p(x).$$
    (c) Soient x et y dans $\mathbb{R}^n$. Soit $\varepsilon > 0$.
        i. Montrer que $\dfrac{x}{p(x)+\varepsilon} \in C$ et $\dfrac{y}{p(y)+\varepsilon} \in C$.
        ii. En déduire que $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y) + 2\varepsilon$.
        iii. En déduire que $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$.
        iv. Montrer que :
        $$C = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid p(x) < 1\right\}.$$

    L'application $p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définie précédemment s'appelle la ***jauge du convexe C***.
13. Soient C un convexe fermé et a un point de C et n'appartenant pas à l'intérieur de C.
    (a) Montrer qu'il existe une suite de points $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ appartenant à $\mathbb{R}^n \setminus C$ telle que :
    $$\lim_{k \longrightarrow +\infty} x_k = a.$$
    (b) Montrer qu'il existe une extractrice $\psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ et un vecteur unitaire $\vec{u}$ tel que :
    $$\lim_{k \longrightarrow +\infty} \frac{x_{\psi(k)} - \pi\big(x_{\psi(k)}\big)}{\big\|x_{\psi(k)} - \pi\big(x_{\psi(k)}\big)\big\|} = \vec{u}.$$
    (c) Soit b dans C. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,
    $$\langle b - \pi(x_k), x_k - \pi(x_k)\rangle \leqslant 0,$$
    puis : $\langle b - a, \vec{u}\rangle \leqslant 0$.
    (d) En déduire que $\{a\}$ et C sont séparables au sens large.
14. Soient A et B deux convexes non vides et disjoints.
    (a) Montrer que l'ensemble $C = A - B$ est un convexe.

(b) Montrer que l'ensemble C ne contient pas 0.

(c) Montrer que l'ensemble $\overline{C}$ est encore convexe.

(d) Montrer que le point 0 n'appartient pas à l'intérieur de $\overline{C}$.
[indication : on pourra faire un raisonnement par l'absurde. On pourra montrer que si D est un ensemble contenant 2^n points de $\mathbb{R}^n$ dont les composantes sont non nulles avec toutes les 2^n répartitions possibles de signes dans ces composantes, alors le point 0 appartient à l'enveloppe convexe de l'ensemble D.]

(e) En déduire que les convexes C et $\{0\}$ sont séparables au sens large par un hyperplan affine.

(f) Conclure que les convexes A et B sont séparables au sens large par un hyperplan affine.

15. Soient A et B deux convexes non vides, disjoints et fermés, la partie A étant de plus bornée.

(a) Montrer qu'il existe $(a, b) \in A \times B$ tel que :

$$\forall (x, y) \in A \times B, \ \|a - b\| \leqslant \|x - y\|.$$

(b) Montrer que l'on peut séparer les parties A et B au sens strict par un hyperplan affine.