Problème de synthèse sur les matrices – corrigé –

1. Il est facile de vérifier – un peu fastidieux ... – que l'ensemble F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
   Ensuite, l'application φ est clairement linéaire et il s'agit d'une bijection car tout élément de F est uniquement déterminé par ses trois premiers termes et étant donnés trois réels a, b et c, on peut construire par récurrence un élément $u \in F$ tel que les trois premiers termes de la suite u soient $u_0 = a$, $u_1 = b$ et $u_2 = c$.
   L'espace $\mathbb{R}^3$ étant de dimension 3, il en est de même de l'espace F.
2. L'application δ est clairement linéaire. Il ne faut pas oublier de montrer que si u une suite dans F, il en est de même de la suite $\delta(u)$.
   En effet, si $u \in F$, en posant $v = \delta(u)$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$u_{n+4} = u_{n+3} - u_{n+2} + u_{n+1},$$
   donc :
   $$v_{n+3} = v_{n+2} - v_{n+1} + v_n.$$
   La suite v vérifie bien la même relation de récurrence linéaire que la suite u.
3. L'application $\varphi^{-1} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow F$ étant un isomorphisme, cette application transforme la base canonique $\mathscr{B}_c$ en une base de l'espace d'arrivée.
   Déterminons maintenant la matrice A.
   • Pour la première colonne, on remarque que les premiers termes de la suite U sont :
   $$1, 0, 0, 1, \cdots$$
   donc les trois premiers termes de la suite $\delta(U)$ sont $0, 0, 1$.
   Ainsi,
   $$\varphi(\delta(U)) = \varphi(W), \text{ puis } \delta(U) = W,$$
   ce qui explique la première colonne.
   • Pour les deux autres colonnes, les premiers termes de la suite V sont :
   $$0, 1, 0, -1, \cdots$$
   donc :
   $$\varphi(\delta(V)) = (1, 0, -1) = \varphi(U - W),$$
   et donc : $\delta(V) = U - W$.

   De même, les premiers termes de la suite W sont :
   $$0, 0, 1, 1, \cdots$$

donc :

$$\varphi(\delta(W)) = (0,1,1) = \varphi(V+W),$$

et donc : $\delta(W) = V + W$.
Conclusion :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. En calculant les puissances successives de la matrice A, on aboutit à :

$$P(A) = 0.$$

On peut aussi s'en sortir sans ces calculs.
On remarque que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\delta^k : \left| \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_{n+k})_{n\in\mathbb{N}} \end{array} \right.$$

et donc :

$$P(\delta) : \left| \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_{n+3} - u_{n+2} + u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}} = 0 \end{array} \right.$$

La matrice $P(A)$ représente l'endomorphisme $P(\delta)$ selon la base $\mathscr{C}$: il s'agit de la matrice nulle puisque l'endomorphisme représenté est nul.

5. On en déduit :

$$A^3 - A^2 + A = I_3 \text{ ou encore } A \times (A^2 - A + I_3) = I_3.$$

La matrice A est bien inversible, d'inverse :

$$A^{-1} = A^2 - A + I_3.$$

6. Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. On résout l'équation matricielle $AX = Y$, d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, conduisant au système linéaire de matrice augmentée :

$$\begin{aligned}
\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 & y_2 \\ 1 & -1 & 1 & y_3 \end{array}\right) & \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & y_3 \\ 0 & 1 & 0 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 & y_2 \end{array}\right) \\
& \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & y_3 - y_2 + y_1 \\ 0 & 1 & 0 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 & y_2 \end{array}\right) \\
& \iff X = \begin{pmatrix} y_1 - y_2 + y_3 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

La matrice A est bien inversible car le système est toujours de Cramer et :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. L'application δ est un isomorphisme car si $v \in F$, il existe un seul antécédent de v par la fonction δ, à savoir la suite :
$$(a, v)$$
où a est un réel ajouté à la suite v tel que :
$$a = v_2 - v_1 + v_0$$
seule possiblité pour que la suite (a, v) appartienne à l'espace F. On observe bien évidemment que :
$$\delta(a, v) = v.$$
La matrice A représente donc un isomorphisme δ selon une base ; la matrice A est inversible et :
$$A^{-1} = \mathscr{M}at_{\mathscr{C}}(\delta^{-1}).$$
Il suffit alors de calculer cette matrice colonne par colonne.
La suite U a pour premiers termes $1, 0, 0$, donc les trois premiers termes de la suite $\delta^{-1}(U)$ sont :
$$1, 1, 0.$$
Ainsi, $\delta^{-1}(U) = U + V$. On a la première colonne de la matrice A^{-1}.
La suite V a pour premiers termes $0, 1, 0$, donc les trois premiers termes de la suite $\delta^{-1}(V)$ sont :
$$-1, 0, 1$$
Ainsi, $\delta^{-1}(V) = -U + W$. On a la deuxième colonne de la matrice A^{-1}.
La suite W a pour premiers termes $0, 0, 1$, donc les trois premiers termes de la suite $\delta^{-1}(W)$ sont :
$$1, 0, 0.$$
Ainsi, $\delta^{-1}(W) = U$. On a la troisième colonne de la matrice A^{-1}.
On retrouve bien évidemment la matrice :
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. (a) On obtient :
$$P(X) = (X^2 + 1)(X - 1).$$

   (b) On obtient par exemple une relation de Bezout par l'algorithme d'Euclide. Tous calculs faits, en voici une :
$$\frac{1}{2}(X^2 + 1) - \frac{X + 1}{2} \cdot (X - 1) = 1.$$

   (c) On en déduit :
$$(X^2 + 1) - (X + 1) \cdot (X - 1) = 2.$$
On peut appliquer cette relation entre polynômes en la matrice A, ce qui donne :
$$(A^2 + I_3) - (A + I_3)(A - I_3) = 2I_3.$$
Soit X un vecteur colonne dans $G \cap H$. Alors, $(A^2 + I_3)X = 0$ et $(A - I_3)X = 0$, donc $(A + I_3)(A - I_3)X = 0$. Conclusion, $2X = 0$, puis $X = 0$: la somme est bien directe.

(d) Soit X un vecteur colonne dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On en déduit :

$$X = \frac{1}{2}(A^2 + I_3)X - \frac{1}{2}(A + I_3)(A - I_3)X.$$

On pose :

$$X_1 = \frac{1}{2}(A^2 + I_3)X \text{ et } X_2 = -\frac{1}{2}(A + I_3)(A - I_3)X,$$

de sorte que : $X = X_1 + X_2$.
Ensuite, on voit que :

$$(A^2 + I_3)X_2 = -\frac{1}{2}(A + I_3)P(A)X = 0, \text{ donc } X_2 \in G$$

et :

$$(A - I_3)X_1 = \frac{1}{2}P(A)X = 0, \text{ donc } X_1 \in H.$$

On obtient donc ce qu'il faut.

(e) Si X appartient à G, alors :

$$(A^2 + I_3)AX = A(A^2 + I_3)X = 0,$$

car les matrices A et $A^2 + I_3$ commutent. Le vecteur AX appartient bien à G.
De même, si X appartient à H, alors :

$$(A - I_3)AX = A(A - I_3)X = 0,$$

et le vecteur colonne AX reste dans H.

(f) • On s'occupe déjà de l'espace $G = \mathrm{Ker}(A^2 + I_3)$.
On calcule déjà la matrice $A^2 + I_3$:

$$A^2 + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On voit que cette matrice est de rang 1, donc son noyau est de dimension 2. On voit que les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont dans le noyau. Une base de G est :

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Une équation cartésienne de cet hyperplan G est :

$$x + z = 0.$$

• On s'occupe maintenant de l'espace $H = \mathrm{Ker}(A - I_3)$.
La matrice $A - I_3$ est :

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice $A - I_3$ est de rang 2 car $C_3 = -C_1 - C_2$ et les colonnes C_1 et C_2 sont non colinéaires.

On en déduit que le noyau $\mathrm{Ker}(A - I_3)$ est de dimension 1. On remarque que le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est dans le noyau. Une base de l'espace H est :

$$\mathscr{B}_H = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

(g) Il suffit alors de montrer qu'en concaténant les deux bases précédentes, la famille

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est bien une base de } \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}).$$

On vérifie facilement qu'il s'agit d'une famille libre à $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ vecteurs. On a bien ce qu'il faut pour l'égalité voulue.

9. On remarque que :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice demandée vaut :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

10. En posant $\mathscr{B}_G = (\chi_1, \chi_2)$ la base précédente pour l'espace G, on vérifie que la famille $\mathscr{F} = (-\chi_1, \chi_2)$ reste une base de G et :

$$\mathscr{M}at_{\mathscr{F}}(b) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

11. On vérifie facilement qu'en posant $\mathscr{B}_H = (\xi)$ la base trouvée ci-dessus pour l'espace H, alors la famille $\mathscr{D} = (-\chi_1, \chi_2, \xi)$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et :

$$\mathscr{M}at_{\mathscr{D}}(a) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A'.$$

Plus précisément, en notant la matrice P de passage de la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, alors :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1}AP = A'.$$

12. Il est facile de calculer les images $f(e_k)$ des vecteurs e_k de la base canonique puis de calculer leurs coordonnées selon la base canonique. On trouve la matrice :

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

13. On note C_k les colonnes de la matrice C.

On observe que les colonnes C_1 et C_2 ne sont pas colinéaires. De plus, la colonne C_3 n'est pas combinaison linéaire des deux premières car sinon, il existerait une solution au système de matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -4 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 0 \\ 7 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

$$\iff \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & -24 \\ 7 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

et on voit que les deux premières lignes donnent quelque chose d'incompatible.

Conclusion, $\mathrm{Rg}(C) = 3$ et une base de $\mathrm{Im}(C)$ est :

$$(C_1, C_2, C_3).$$

Ensuite, par le théorème du rang, l'espace $\mathrm{Ker}(C)$ est de dimension 1 et comme la quatrième colonne C_4 est nulle, on en déduit que le quatrième vecteur e_4 de la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est dans le noyau et en constitue donc une base.

Conclusion, en prenant les matrices :

$$P = I_4 \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

alors :

$$Q^{-1}CP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = J_3.$$

14. On observe que l'image $L = \mathrm{Im}(f)$ est un espace de dimension 3. De plus, on a clairement :

$$\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}^3 \times \{0\},$$

avec égalité des dimensions finies.

Par conséquent, l'image $\mathrm{Im}(f)$ est égale à $\mathbb{R}^3 \times \{0\}$. Enfin, les vecteurs $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ constituent une base de $\mathrm{Im}(f)$, donc constituent une base de $\mathbb{R}^3 \times \{0\}$ et on sait que

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)).$$

On en déduit :

$$f(L) = f(\mathbb{R}^3 \times \{0\}) = f\Big(\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)\Big) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = L.$$

L'hyperplan $L = \mathbb{R}^3 \times \{0\}$ est un hyperplan qui répond à la question.

On remarque que si M est un hyperplan vérifiant $f(M) = M$, alors $M = f(M) \subset \mathrm{Im}(f)$ avec égalité des dimensions finies, amenant $M = \mathrm{Im}(f)$. Il y a unicité de l'hyperplan L en question.

15. En prenant la base $\mathscr{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ de l'hyperplan L, il est facile de voir que :

$$C' = \mathscr{M}at_{\mathscr{B}'}(g) = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 4 & -4 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

16. On cherche une base (u_1, u_2, u_3) de l'espace L telle que :

$$g(u_1) = u_2,\ g(u_2) = -u_1 \text{ et } g(u_3) = u_3.$$

Les vecteurs u_1 et u_2 doivent appartenir à $\mathrm{Ker}(g^2 + \mathrm{id})$ et le vecteur u_3 doit appartenir à $\mathrm{Ker}(g - \mathrm{id})$.
On explicite déjà une base de $\mathrm{Ker}(g - \mathrm{id})$, ou encore une base de $\mathrm{Ker}(C' - I_3)$.
Or,

$$C' - I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 4 & -5 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On remarque que cette matrice $C' - I_3$ est de rang au moins 2 car les deux premières colonnes ne sont pas colinéaires.
On remarque ensuite qu'en notant C_k les colonnes de $C' - I_3$, alors :

$$2C_1 + C_2 + 3C_3 = 0.$$

On en déduit $\mathrm{Rg}(C' - I_3) = 2$ et donc $\dim(\mathrm{Ker}(C' - I_3)) = 1$, le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ constituant une base de ce noyau.
On choisit le vecteur $U_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
On détermine maintenant le noyau de $C'^2 + I_3$.
Or, cette matrice que l'on note E vérifie :

$$E = C'^2 + I_3 = \begin{pmatrix} -6 & 4 & 4 \\ -3 & 2 & 2 \\ -9 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que toutes les colonnes de cette matrice sont proportionnelles :

$$\mathrm{Rg}(E) = 1, \text{ donc } \dim(\mathrm{Ker}(E)) = 2.$$

Le noyau $\mathrm{Ker}(E)$ est déterminé par l'équation cartésienne :

$$-3x + 2y + 2z = 0 \iff x = \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z.$$

Une base de $\mathrm{Ker}(E)$ est donc :

$$\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

Choisissons par exemple le vecteur :

$$U_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On pose alors le vecteur :

$$U_2 = C'U_1 = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

On voit alors que la famille (U_1, U_2, U_3) forme une famille libre dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
Ensuite, on voit que $C'U_3 = U_3$, que $C'U_1 = U_2$ et que $C'U_2 = -U_1$.
Par conséquent, en posant la matrice de passage de la base canonique vers la base (U_1, U_2, U_3), alors :

$$S = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } S^{-1}C'S = A'.$$

17. On sait que la matrice C' est semblable à la matrice A', elle-même semblable à la matrice A. Par transitivité, la matrice C' est semblable à la matrice A.
Pour trouver une matrice de passage T convenable, il suffit d'écrire :

$$C' = SA'S^{-1} = S(P^{-1}AP)S^{-1}.$$

La matrice inversible [en tant que produit de deux matrices inversibles] :

$$T = SP^{-1}$$

vérifie donc :

$$C' = TAT^{-1} \text{ ou encore } T^{-1}C'T = A.$$

On peut appliquer la méthode de résolution du système $PX = Y$, à la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ce qui donne tous calculs faits :

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit le produit matriciel :

$$T = SP^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 \\ 0 & 4 & -3 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

18. On procède par analyse / synthèse.

• phase d'analyse

Si H' est un hyperplan de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ donné par une équation cartésienne de la forme :

$$ax + by + cz = 0$$

en notant le vecteur colonne $U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, alors :

$$\forall X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ X \in H' \iff U^T X = 0.$$

Si l'hyperplan H' est stable par C', alors :

$$\forall X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ U^T X = 0 \Longrightarrow U^T C' X = 0 \Longrightarrow V^T X = 0$$

en posant $V = {C'}^T U$. Posons maintenant :

$$V = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix},$$

puis les formes linéaires :

$$\rho_1 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & ax+by+cz \end{array} \right. \text{ et } \rho_2 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & a'x+b'y+c'z \end{array} \right. .$$

Ce qui précède implique :

$$\mathrm{Ker}(\rho_1) \subset \mathrm{Ker}(\rho_2).$$

On sait alors qu'il existe λ dans $\mathbb{R}$ tel que :

$$\rho_2 = \lambda \cdot \rho_1.$$

En évaluant en les vecteurs de la base canonique, alors :

$$\rho_2(e_1) = a' = \lambda \cdot \rho_1(e_1) = \lambda \cdot a$$

et de même pour les deux autres composantes.
On en déduit que :

$$V = \lambda \cdot U \text{ et } {C'}^T U = \lambda \cdot U.$$

En posant dans la suite la matrice $M = {C'}^T$, alors $MU = \lambda \cdot U$. On montre par récurrence sur l'entier k que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ M^k U = \lambda^k \cdot U$$

et donc pour tout polynôme $R(X) \in \mathbb{R}[X]$:

$$R(M)U = R(\lambda) \cdot U.$$

En particulier, lorsque l'on prend le polynôme $R(X) = P(X) = X^3 - X^2 + X - 1$, on obtient :

$$P(M) \cdot U = P(\lambda) U.$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^k = ({C'}^k)^T$, et donc :

$$P(M) = (P(C'))^T.$$

Comme la matrice C' est égale à TAT^{-1}, on peut écrire classiquement :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ {C'}^k = TA^kT^{-1},$$

donc :

$$P(M) = \left(TP(A)T^{-1}\right)^T = 0, \text{ car } P(A) = 0.$$

On aboutit alors à l'égalité :

$$P(\lambda) \cdot U = 0.$$

Le vecteur U étant non nul, c'est le scalaire $P(\lambda)$ qui est nul.
Le polynôme $P(X) = (X^2+1)(X-1)$ n'admet qu'une seule racine réelle : le scalaire λ est nécessairement égal à 1.
Le vecteur U appartient donc au noyau $\operatorname{Ker}(C' - I_3)$. Or,

$$C'^T - I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -4 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On cherche une base de $\operatorname{Ker}(M - I_3)$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Ona successivement :

$$\begin{aligned} X \in \operatorname{Ker}(M - I_3) \quad & \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 2x + 4y - z = 0 \\ -4x - 5y - z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \\ & \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = -\dfrac{3}{2}z \\ y = z \end{cases} \\ & \Longleftrightarrow \quad X \in \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

On en déduit que l'hyperplan H' est d'équation cartésienne :

$$-3x + 2y + 2z = 0.$$

• phase de synthèse
On considère l'hyperplan H' d'équation cartésienne :

$$-3x + 2y + 2z = 0.$$

On vérifie que l'hyperplan H' est stable par l'application linéaire canoniquement associée à la matrice C'.
Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in H'$. Alors, $-3x + 2y + 2z = 0$.
Le produit matriciel donne :

$$C'X = \begin{pmatrix} 3x - 4y \\ 4x - 4y - z \\ -x - y + 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

On calcule finalement :

$$-3x' + 2y' + 2z' = -3x + 2y + 2z = 0.$$

Cet hyperplan H' est bien stable par l'application linéaire canoniquement associé à la matrice C'.

Il y a pas mal d'idées généralisables à retenir dans la résolution précédente.
On peut aussi résoudre comme suit la question.
La matrice C' vérifie :

$$P(C') = 0.$$

Comme $P(X) = (X^2+1)(X-1)$ et que les polynômes X^2+1 et $X-1$ sont premiers entre eux, alors :

$$\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker}(C'^2 + I_3) \oplus \operatorname{Ker}(C' - I_3).$$

Or, la matrice $C'^2 + I_3$ est égale à :

$$C'^2 + I_3 = \begin{pmatrix} -6 & 4 & 4 \\ -3 & 2 & 2 \\ -9 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Il est facile de constater que le rang de cette matrice vaut 1 et que le noyau de cette matrice est un hyperplan d'équation cartésienne :

$$-3x + 2y + 2z = 0.$$

On peut maintenant montrer que cet hyperplan $H' = \operatorname{Ker}(C'^2 + I_3)$ est le seul hyperplan stable par C'.
En effet, cet hyperplan H' est un hyperplan stable par C' car si $X \in H'$, alors :

$$(C'^2 + I_3)C'X = C'(C'^2 + I_3)X = 0,$$

donc $C'X \in H'$.
Si H était un autre hyperplan stable par C', alors comme $H \neq H'$ et que ces deux espaces ont même dimension 2, alors aucun n'est inclus dans l'autre. En particulier,

$$H + H' = \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}).$$

Grâce à la formule de Grassmann :

$$\dim(D) = \dim(H) + \dim(H') - \dim(H + H') = 2 + 2 - 3 = 1.$$

Ensuite, si X est un vecteur non nul de la droite D, on en déduit :

$$C'X \in H \text{ et } C'X \in H' \text{ , donc } C'X \in D.$$

La droite D est stable par C'. Comme (X) est une base de la droite D, on peut poser :

$$C'X = \lambda \cdot X.$$

Ainsi,

$$(C'^2 + I_3)X = (\lambda^2 + 1) \cdot X.$$

Comme le vecteur X appartient à l'hyperplan $H' = \mathrm{Ker}(C'^2 + I_3)$, alors :

$$(C'^2 + I_3)X = 0.$$

Ceci implique que le vecteur $(\lambda^2 + 1) \cdot X$ soit nul.
Cependant, ni le vecteur X n'est nul, ni le scalaire $\lambda^2 + 1 \geqslant 1$ n'est nul : contradiction.
Un tel hyperplan $H \neq H'$ stable par C' n'existe pas et H' est bien le seul hyperplan stable par C'.

On aurait pu exploiter la similitude de la matrice C' avec la matrice plus simple A'.
Par la question **Q.16**, on écrit :

$$C' = SA'S^{-1},$$

la matrice S inversible ayant été explicitée plus haut.
On procède par analyse/synthèse pour déterminer les hyperplans H' de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ stables par l'application linéaire $u_{C'}$.
Soit H' un tel hyperplan. Alors,

$$u_{C'}(H') \subset H', \text{ donc } u_S \circ u_{A'} \circ u_{S^{-1}}(H') \subset H'.$$

En composant par $u_{S^{-1}} = u_S^{-1}$ puis en posant $K' = u_S^{-1}(H')$ qui reste un sous-espace de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ avec $\dim(K') = 2$, alors l'hyperplan K' est stable par $u_{A'}$.
On remarque qu'en notant $\mathscr{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, alors $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ est stable par $u_{A'}$.
Réciproquement, en posant $K' = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$, alors l'ensemble $u_S(K') = \mathrm{Vect}(u_S(e_1), u_S(e_2))$ est un hyperplan de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ stable par $u_{C'}$ en utilisant les calculs faits plus haut.
On sait que les vecteurs $u_S(e_1)$ et $u_S(e_2)$ constituent les deux premières colonnes de la matrice S.
On obtient une base d'un hyperplan H' convenable :

$$H' = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} \right).$$

Il est facile, étant ces deux vecteurs de trouver une équation cartésienne de cet hyperplan.
On vérifie facilement que la forme linéaire :

$$\varphi = -3 \cdot e_1^* + 2 \cdot e_2^* + 2 \cdot e_3^*$$

est non nulle et :

$$H' = \mathrm{Ker}(\varphi).$$