

Problème de synthèse sur les matrices

On note :

$$F = \left\{ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = u_{n+2} - u_{n+1} + u_n \right\}$$

et :

$$\varphi : \begin{cases} F & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \longmapsto (u_0, u_1, u_2) \end{cases} .$$

On note $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que l'ensemble F est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et que l'application φ est un isomorphisme.
2. Montrer que l'application $\delta : (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est un endomorphisme de l'espace F .

Dans la suite, on note :

$$U = \varphi^{-1}(e_1), \quad V = \varphi^{-1}(e_2) \text{ et } W = \varphi^{-1}(e_3)$$

et le polynôme :

$$P(X) = X^3 - X^2 + X - 1 \in \mathbb{R}[X].$$

3. Montrer que la famille $\mathcal{C} = (U, V, W)$ est une base de l'espace F et compléter la matrice A représentant l'endomorphisme δ :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \star \\ 0 & \star & \star \\ 1 & \star & \star \end{pmatrix} .$$

4. Calculer la matrice $P(A)$.
5. En déduire que la matrice A est inversible et calculer la matrice A^{-1} .
6. Retrouver le fait que la matrice A soit inversible par le système linéaire $AX = Y$, et retrouver la matrice inverse A^{-1} .
7. Comment utiliser l'endomorphisme $\delta \in \mathcal{L}(F)$ pour retrouver par une troisième façon les résultats des deux questions précédentes ?

On pose dans la suite :

$$G = \text{Ker}(A^2 + I_3) \text{ et } H = \text{Ker}(A - I_3).$$

8. (a) Factoriser le polynôme $P(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$.
- (b) Déterminer une relation de Bezout entre $X^2 + 1$ et $X - 1$.
- (c) En déduire que la somme $G + H$ est directe.
- (d) Montrer que $G + H = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- (e) Montrer que les espaces G et H sont stables par l'application linéaire notée a canoniquement associée à la matrice A .
- (f) Expliciter une base des espaces G et H et les caractériser par des équations cartésiennes.
- (g) Retrouver le fait que :

$$\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = G \oplus H.$$

Dans la suite, on note $\mathcal{B}_G$ la base de l'espace G trouvée ci-dessus et la base $\mathcal{B}_H$ de l'espace H trouvée ci-dessus. On note b la restriction de l'application linéaire a à l'espace G .

9. Expliciter la matrice :

$$B = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}_G}(b).$$

10. Montrer que la matrice B est semblable à la matrice :

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

11. Montrer que la matrice A est semblable à la matrice :

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On considère maintenant l'application linéaire :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z, t) & \longmapsto (3x - 4y, 4x - 4y - z, -x - y + 2z, 0) \end{cases}.$$

- 12. Déterminer la matrice C représentant l'endomorphisme f selon la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
- 13. Proposer deux matrices inversibles P et Q et un entier r tels que la matrice $Q^{-1}CP$ soit une matrice de type J_r .
- 14. Expliciter un hyperplan L simple de $\mathbb{R}^4$ dont on donnera une équation cartésienne qui vérifie $f(L) = L$. On note g la restriction de l'application f à l'hyperplan L .
- 15. Déterminer la matrice C' représentant l'endomorphisme g selon une base simple de l'hyperplan L .
- 16. Montrer que la matrice C' est semblable à la matrice A' de la question 11. Expliciter une matrice de passage S telle que $S^{-1}C'S = A'$.
- 17. Montrer que la matrice C' est semblable à la matrice A de la question 3. Expliciter une matrice de passage T telle que $T^{-1}C'T = A$.
- 18. Déterminer une base d'un hyperplan H' de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dont on donnera également une équation cartésienne, tel que l'hyperplan H' soit stable par l'application linéaire associée à la matrice C' .