Problème de synthèse sur les espaces vectoriels et les applications linéaires - corrigé -

1. En tant que sous-espace vectoriel engendré par une famille, l'ensemble F est immédiatement un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

   La famille $\mathscr{F} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est une famille génératrice dans l'espace F : l'espace F est de dimension inférieure ou égale à 3.
   On va montrer que la famille $\mathscr{F}$ est libre.
   Soit $\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \gamma \cdot \vec{c} = 0$, une combinaison linéaire nulle des vecteurs de la famille $\mathscr{F}$. On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = 0 \\ 2\alpha - \beta = 0 \\ -\beta + 3\gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta + 4\gamma = 0 \end{cases}$$

   imposant par les deux premières lignes $\alpha = \beta = 0$, puis par la troisième ligne : $\gamma = 0$.
   Une base de F est la famille $\mathscr{F}$.
2. Les applications :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z, t) & \longmapsto & y - 2z + 5t \end{array} \right. \quad \text{et } \psi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z, t) & \longmapsto & x + y + z - t \end{array} \right.$$

   sont clairement linéaires et :

$$G = \operatorname{Ker}(\varphi) \cap \operatorname{Ker}(\psi)$$

   est un espace vectoriel en tant qu'intersection de deux noyaux de formes linéaires.
   Le plus simple est de déterminer une base de G pour en déduire la dimension de G.
   Soit (x, y, z, t) un vecteur de $\mathbb{R}^4$. On a successivement :

$$\begin{aligned} (x, y, z, t) \in G \quad & \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x + y + z - t = 0 \\ y - 2z + 5t = 0 \end{cases} \\ & \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = -3z + 6t \\ y = 2z - 5t \end{cases} \\ & \Longleftrightarrow \quad (x, y, z, t) = (-3z + 6t, 2z - 5t, z, t) \\ & \Longleftrightarrow \quad (x, y, z, t) = z \cdot (-3, 2, 1, 0) + t \cdot (6, -5, 0, 1) \\ & \Longleftrightarrow \quad (x, y, z, t) \in \operatorname{Vect}\Big((-3, 2, 1, 0), (6, -5, 0, 1)\Big) \end{aligned}$$

La famille $\mathscr{G} = \Big((-3,2,1,0),(6,-5,0,1)\Big)$ est génératrice dans G et est clairement libre : c'est une base de G et $\dim(G) = 2$.

3. L'ensemble F est un hyperplan. Il suffit de montrer que l'espace G n'est pas inclus dans F car dans ce cas, l'espace $F+G$ contiendra strictement l'espace F. On aura d'une part l'inclusion $F \subset F+G$ et d'autre part la différence des dimensions entre les espaces F et $F+G$, ce qui imposera $\dim(F+G) > 3$, puis $\dim(F+G) = \dim(\mathbb{R}^4)$ avec bien évidemment l'inclusion $F+G \subset \mathbb{R}^4$, donc égalité.
Montrons par exemple que le vecteur $(-3,2,1,0)$ n'appartient pas à l'espace F. Dans le cas contraire, on aurait l'existence de trois scalaires α, β et γ tels que :
$$(-3,2,1,0) = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \gamma \cdot \vec{c},$$
conduisant au système :
$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = -3 \\ 2\alpha - \beta = 2 \\ -\beta + 3\gamma = 1 \\ \alpha + 2\beta + 4\gamma = 0 \end{cases}$$
système linéaire impliquant alors :
$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = -3 \\ -7\beta = 8 \\ -\beta + 3\gamma = 1 \\ -\beta + 4\gamma = 3 \end{cases}.$$
Les deux dernières lignes imposent par soustraction que γ vaille 2, puis par la troisième ligne que β vaille 5, ce qui est incompatible avec la deuxième ligne.
On a bien le fait que G n'est pas inclus dans F, puis $F+G = \mathbb{R}^4$.

4. Par la formule de Grassmann, on peut écrire :
$$\dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F+G) = 3 + 2 - 4 = 1.$$
Pour déterminer une base de $F \cap G$, le plus simple est de caractériser l'hyperplan F par une équation cartésienne, bref de répondre d'abord à la question 5.

Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. On a successivement les équivalences :

$$\begin{aligned}
(x,y,z,t) \in F \quad & \Longleftrightarrow \quad \exists(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} x = \alpha + 3\beta \\ y = 2\alpha - \beta \\ z = -\beta + 3\gamma \\ t = \alpha + 2\beta + 4\gamma \end{cases} \\
& \Longleftrightarrow \quad \exists(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} \alpha + 3\beta = x \\ -7\beta = y - 2x \\ -\beta + 3\gamma = z \\ -\beta + 4\gamma = t - x \end{cases} \\
& \Longleftrightarrow \quad \exists(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} \alpha + 3\beta = x \\ -7\beta = y - 2x \\ 21\gamma = 7z - y + 2x \\ 28\gamma = 7t - 7x - y + 2x \end{cases} \\
& \Longleftrightarrow \quad \exists(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} \alpha + 3\beta = x \\ -7\beta = y - 2x \\ 21\gamma = 7z - y + 2x \\ 0 = \dfrac{7t - 5x - y}{4} - \dfrac{7z - y + 2x}{3} \end{cases} \\
& \Longleftrightarrow \quad (7t - 5x - y) \times 3 - (7z - y + 2x) \times 4 = 0 \\
& \Longleftrightarrow \quad -23x + y - 28z + 21t = 0
\end{aligned}$$

L'ensemble F est caractérisé par l'équation cartésienne :

$$23x - y + 28z - 21t = 0.$$

On en déduit maintenant le calcul d'une base de $F \cap G$, dont on sait qu'il s'agit d'une droite vectorielle.
Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. On a successivement :

$$\begin{aligned}
(x,y,z,t) \in F \cap G \quad & \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x + y + z - t = 0 \\ y - 2z + 5t = 0 \\ 23x - y + 28z - 21t = 0 \end{cases} \\
& \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x + y + z - t = 0 \\ y - 2z + 5t = 0 \\ -24y + 5z + 2t = 0 \end{cases} \\
& \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x + y + z - t = 0 \\ y - 2z + 5t = 0 \\ -43z + 122t = 0 \end{cases} \\
& \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = -\dfrac{108}{43}t \\ y = \dfrac{29}{43}t \\ z = \dfrac{122}{43}t \end{cases} \\
& \Longleftrightarrow \quad (x,y,z,t) \in \mathrm{Vect}\Big((-108, 29, 122, 43)\Big).
\end{aligned}$$

La famille $\Big((-108, 29, 122, 43)\Big)$ est génératrice dans $F \cap G$ et forme une famille libre : c'est une base de $F \cap G$.

5. La forme linéaire :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & 23x - y + 28z - 21t \end{array} \right.$$

répond à la question.

6. On commence par l'implication la plus facile, à savoir $\Longleftarrow$.
Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\psi = \lambda \cdot \rho.$$

Soit u un vecteur dans $\mathrm{Ker}(\rho)$. Alors, $\rho(u) = 0$, puis immédiatement :

$$\psi(u) = 0 \text{ , donc } u \in \mathrm{Ker}(\psi).$$

Supposons maintenant $\mathrm{Ker}(\rho) \subset \mathrm{Ker}(\psi)$.
On distingue deux cas :
   - si $\rho = 0$, alors $\mathrm{Ker}(\rho) = E$, impliquant $\mathrm{Ker}(\psi) = E$, puis $\psi = 0$. Tout scalaire λ vérifie $\psi = \lambda \cdot \rho$.
   - si $\rho \neq 0$, alors le noyau $H = \mathrm{Ker}(\rho)$ est un hyperplan de l'espace E de dimension n. L'espace H est de dimension $(n-1)$ et on trouve une base $(e_1, \cdots, e_{n-1})$ de H. On complète en une base $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_{n-1}, \chi)$ de E.
   Comme le vecteur χ n'appartient pas à H, on sait que le scalaire $\rho(\chi)$ est non nul.
   On vérifie que les formes linéaires ψ et $\dfrac{\psi(\chi)}{\rho(\chi)} \cdot \rho$ coïncident sur la base $\mathscr{B}$.
   Pour tout entier i entre 1 et $n-1$, on a $e_i \in \mathrm{Ker}(\rho)$, donc $e_i \in \mathrm{Ker}(\psi)$ et donc :

   $$\psi(e_i) = 0 = \frac{\psi(\chi)}{\rho(\chi)} \cdot \rho(e_i).$$

   Enfin,

   $$\frac{\psi(\chi)}{\rho(\chi)} \cdot \rho(\chi) = \psi(\chi).$$

   Conclusion, le scalaire $\lambda = \dfrac{\psi(\chi)}{\rho(\chi)}$ convient dans ce cas.

7. Il suffit de montrer que le vecteur $\vec{e}$ n'appartient pas à l'hyperplan F. Or, en reprenant la forme linéaire de la question 5., on voit que :

$$\varphi(\vec{e}) = 166 \neq 0.$$

8. En notant q la projection sur $\mathrm{Vect}(\vec{e})$ parallèlement à F, alors :

$$q = \mathrm{id} - p \text{ et } s = 2q - \mathrm{id},$$

donc :

$$s = \mathrm{id} - 2p.$$

9. Soit (x,y,z,t) un vecteur de $\mathbb{R}^4$. On pose :

$$(x,y,z,t) = \vec{u}_F + \lambda \cdot \vec{e},$$

où λ est un scalaire.
On applique la forme linéaire φ de la question 5. ce qui donne :

$$23x - y + 28z - 21t = 166 \cdot \lambda.$$

On en déduit l'expression de $p(x,y,z,t) = \vec{u}_H$:

$$p(x,y,z,t) = (x,y,z,t) - \frac{23x - y + 28z - 21t}{166} \cdot (6,0,1,0).$$

10. On suppose $f \circ p = p \circ f$.
Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathrm{Ker}(p)$. On en déduit :
$$p(f(\vec{u})) = f(p(\vec{u})) = f(0) = 0.$$
Ainsi, le vecteur $f(\vec{u})$ appartient bien à $\mathrm{Ker}(p)$.
Soit $\vec{v}$ un vecteur de $\mathrm{Im}(p)$. On en déduit $p(\vec{v}) = \vec{v}$, puis en appliquant l'endomorphisme f :
$$f(\vec{v}) = f \circ p(\vec{v}) = p \circ f(\vec{v}),$$
et donc le vecteur $f(\vec{v})$ est invariant par la projection p : il appartient à son image.

Supposons réciproquement que f laisse stable le noyau et l'image de la projection p.
Si $\vec{u}$ est dans $\mathrm{Ker}(p)$, alors :
$$f \circ p(\vec{u}) = 0 \text{ et } p \circ f(\vec{u}) = 0.$$
Si $\vec{v}$ est dans $\mathrm{Im}(p)$, alors :
$$f \circ p(\vec{v}) = f(\vec{v}) \text{ et } p \circ f(\vec{v}) = f(\vec{v}).$$
Les applications linéaires $f \circ p$ et $p \circ f$ coïncident sur les espaces $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$, donc sur leur somme qui vaut $\mathbb{R}^4$: les endomorphismes f et p commutent.

11. Premièrement, l'application Φ est bien définie car si f est dans $\mathscr{C}$, alors l'application f laisse bien stable les espaces $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$. On peut donc très bien prendre les restrictions de f à ces deux sous-espaces, ce qui fournira par restriction des endomorphismes de ces sous-espaces.
L'application Φ est clairement linéaire.
Ensuite, en notant $\mathscr{B}_1$ une base de $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathscr{B}_2$ une base de $\mathrm{Im}(p)$, on sait que la famille $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ sera une base de $\mathbb{R}^4$. Si f est dans $\mathrm{Ker}(\Phi)$, alors f coïncide avec l'application nulle sur les bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$, donc sur la base $\mathscr{B}$: f est nulle et l'application Φ est injective.
Finalement, si (g, h) est un élément de $\mathscr{L}$, il existe une application linéaire $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$ telle que :
$$\begin{cases} \forall \vec{u} \in \mathscr{B}_1,\ f(\vec{u}) = g(\vec{u}) \\ \forall \vec{v} \in \mathscr{B}_2,\ f(\vec{v}) = h(\vec{v}) \end{cases}.$$
Les applications linéaires $f_{|\mathrm{Ker}(p)}$ et g coïncident sur la base $\mathscr{B}_1$ donc sur $\mathrm{Ker}(p)$ et les applications linéaires $f_{|\mathrm{Im}(p)}$ et h coïncident sur la base $\mathscr{B}_2$ donc sur $\mathrm{Im}(p)$.
Enfin, il est clair que l'application f laisse stable $\mathrm{Ker}(p)$ [car g laisse stable $\mathrm{Ker}(p)$] et laisse aussi stable $\mathrm{Im}(p)$ [car h laisse stable $\mathrm{Im}(p)$], donc l'endomorphisme f commute avec p et appartient de ce fait à $\mathscr{C}$. Résultat des courses,
$$\Phi(f) = (g, h)$$
et l'application Φ est surjective.

12. On vérifie aisément les points suivants :
    - on a l'inclusion $\mathscr{C} \subset \mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$, qui est une $\mathbb{R}$-algèbre
    - pour tous f et g dans $\mathscr{C}$, pour tout λ dans $\mathbb{C}$, alors :
$$\lambda \cdot f + g \in \mathscr{C}$$

- pour tous f et g dans $\mathscr{C}$,
$$f \circ g \in \mathscr{C}$$
- $\mathrm{id} \in \mathscr{C}$.

L'ensemble $\mathscr{C}$ est à la fois un sous-espace et un sous-anneau de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$: c'est une sous-algèbre de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$.

Comme l'espace $\mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$ est de dimension finie égale à 16, alors le sous-espace $\mathscr{C}$ est encore de dimension finie.
De plus, par la question 11., on conclut par :

$$\begin{aligned} \dim(\mathscr{C}) &= \dim\Big(\mathscr{L}(\mathrm{Ker}(p)) \times \mathscr{L}(\mathrm{Im}(p))\Big) \\ &= \dim\Big(\mathscr{L}(\mathrm{Ker}(p))\Big) + \dim\Big(\mathscr{L}(\mathrm{Im}(p))\Big) \\ &= \dim(\mathrm{Ker}(p))^2 + \dim(\mathrm{Im}(p))^2 \\ &= 1^2 + 3^2 = 10. \end{aligned}$$