Problème de synthèse sur les espaces vectoriels et les applications linéaires

On travaille dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^4$.
On adopte dans toute la suite les notations suivantes :

$$\begin{array}{r|c} \vec{a} = (1,2,0,1) & F = \mathrm{Vect}\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) \\ \vec{b} = (3,-1,-1,2) & \\ \vec{c} = (0,0,3,4) & G = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \left[\begin{array}{l} y - 2z + 5t = 0 \\ x + y + z - t = 0 \end{array} \right. \right\} \end{array}$$

1. Montrer que l'ensemble F est un espace vectoriel de dimension finie et calculer $\dim(F)$.
2. Montrer que l'ensemble G est un espace vectoriel de dimension finie et calculer $\dim(G)$.
3. Montrer que :
$$F + G = \mathbb{R}^4.$$
4. En déduire $\dim(F \cap G)$. Déterminer une base de $F \cap G$.
5. Expliciter une forme linéaire $\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :
$$F = \mathrm{Ker}(\varphi).$$
6. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient ψ et ρ deux formes linéaires dans $\mathscr{L}(E, \mathbb{R})$. Montrer l'équivalence :
$$\mathrm{Ker}(\rho) \subset \mathrm{Ker}(\psi) \iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \psi = \lambda \cdot \rho.$$
7. Montrer qu'en posant $\vec{e} = (6,0,1,0)$, alors :
$$F \oplus \mathrm{Vect}(\vec{e}) = \mathbb{R}^4.$$

On note dans la suite p la projection sur F parallèlement à $\mathrm{Vect}(\vec{e})$ et s la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}(\vec{e})$ parallèlement à F.

8. Expliciter une formule exprimant la symétrie s en fonction de p.
9. Expliciter l'application linéaire p.

Dans la suite, on note le commutant de p :

$$\mathscr{C} = \left\{ f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4) \mid f \circ p = p \circ f \right\}.$$

10. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$. Montrer l'équivalence entre les deux points suivants :
    - $f \in \mathscr{C}$
    - $f(\mathrm{Ker}(p)) \subset \mathrm{Ker}(p)$ et $f(\mathrm{Im}(p)) \subset \mathrm{Im}(p)$.

11. Montrer que l'application :

$$\Phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{C} & \longrightarrow & \mathscr{L}(\mathrm{Ker}(p)) \times \mathscr{L}(\mathrm{Im}(p)) \\ f & \longmapsto & (f_{|\mathrm{Ker}(p)}, f_{|\mathrm{Im}(p)}) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme.

12. Montrer que l'ensemble $\mathscr{C}$ est une sous-algèbre de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$ de dimension finie et expliciter sa dimension.