Le théorème de d'Alembert-Gauss

Théoréme 1
Tout polynôme non constant à coefficients complexes admet au moins une racine complexe.

Démonstration 1

Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k\ X^k$ un polynôme non constant dans $\mathbb{C}[X]$, $d = \deg(P) \geqslant 1$, donc $a_d \neq 0$.
On procède en plusieurs étapes.

étape 1 : étude de la fonction polynomiale associée

On pose $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & P(z) \end{array} \right.$, la fonction polynomiale associée.
Lorsque z est un complexe non nul, alors, lorsque $|z|$ tend vers $+\infty$, on peut écrire :

$$|f(z)| = |z|^d \times \left| a_d + \sum_{k=0}^{d-1} \frac{a_k}{z^{d-k}} \right| = |z|^d \times (|a_d + \circ(1)|) \sim |a_d|\ |z|^d.$$

Par conséquent,

$$\lim_{|z| \longrightarrow +\infty} |f(z)| = +\infty.$$

On montre ensuite que la fonction $z \longmapsto |f(z)|$ admet un minimum global sur $\mathbb{C}$.
En effet, par définition de la limite, il existe $R > 0$ tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |z| \geqslant R \Longrightarrow |f(z)| \geqslant |f(0)| + 1.$$

Ensuite, la fonction $|f|$ est minorée par 0 sur le disque fermé $\mathscr{D}$ de centre 0 et de rayon R.
On note τ la borne inférieure de la fonction $|f|$ sur l'ensemble $\mathscr{D}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $z_n \in \mathscr{D}$ tel que :

$$\tau \leqslant |f(z_n)| < \tau + \frac{1}{n}.$$

La suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée dans $\mathbb{C}$ par R : le théorème de Bolzano-Weierstrass s'applique et on trouve une sous-suite $(z_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente de limite $\xi \in \mathscr{D}$.
Par passage à la limite dans l'encadrement $\tau \leqslant |f(z_{\varphi(n)})| < \tau + \dfrac{1}{\varphi(n)}$, la fonction $|f|$ étant continue, on obtient :

$$|f(\xi)| = \tau.$$

Finalement, si $z \in \mathbb{C}$,

- soit $|z| > R$, auquel cas : $|f(z)| \geqslant |f(0)| + 1 \geqslant |f(\xi)| + 1 > |f(\xi)|$ car 0 appartient au disque $\mathscr{D}$,
- soit $|z| \leqslant R$, auquel cas $z \in \mathscr{D}$ et $|f(z)| \geqslant |f(\xi)|$.

La fonction $z \longmapsto |f(z)|$ admet donc un minimum global en ξ et $|f(\xi)| = \tau$.

étape 2 : étude locale en ξ

Dans la suite, on raisonne par l'absurde en supposant que $\tau > 0$, autrement dit, la fonction f ne s'annule jamais sur $\mathbb{C}$.
La formule de Taylor pour les polynômes donne :

$$P(X+\xi) = \sum_{k=0}^{d} \frac{P^{(k)}(\xi)}{k!}\ X^k.$$

On écrit donc pour tout complexe h :

$$f(\xi+h) = P(\xi+h) = \sum_{k=0}^{d} b_k\ h^k,$$

avec $b_0 = f(\xi) \neq 0$ et $b_d = a_d \neq 0$.
On pose k_0 le plus petit indice $k > 0$ tel que $b_k \neq 0$ de sorte que :

$$f(\xi+h) = b_0 + \sum_{k=k_0}^{d} b_k\ h^k = f(\xi) + b_{k_0} h^{k_0} + \circ(h^{k_0}),$$

lorsque h tend vers 0.
En écrivant : $f(\xi+h) = f(\xi)\left(1 - (c \cdot h)^{k_0} + \circ(h^{k_0})\right)$, lorsque h tend vers 0, avec c une solution de l'équation $Z^{k_0} = -\dfrac{b_{k_0}}{f(\xi)}$.
On applique ce qui précéde au complexe $h = \overline{c}\ t$, avec $t \in]0, +\infty[$. Lorsque le réel t tend vers 0^+, on obtient :

$$f(\xi+h) = f(\xi)\left(1 - |c|^{2k_0}\ t^{k_0} + \circ(t^{k_0})\right).$$

Lorsque $t > 0$ est suffisamment petit, on obtient :

$$\left|\circ(t^{k_0})\right| \leqslant \frac{1}{2}|c|^{2k_0}\ t^{k_0},$$

donc :

$$\begin{aligned}
|f(\xi+h)| &= |f(\xi)|\left|1 - |c|^{2k_0}\ t^{k_0} + \circ(t^{k_0})\right| \\
&\leqslant |f(\xi)|\left(1 - |c|^{2k_0}\ t^{k_0} + \frac{1}{2}|c|^{2k_0}\ t^{k_0}\right) \\
&= |f(\xi)|\left(1 - \frac{1}{2}|c|^{2k_0}\ t^{k_0}\right) \\
&< |f(\xi)|.
\end{aligned}$$

On aboutit à une contradiction de la minimalité de $|f(\xi)|$.

Conclusion, $\tau = 0$ et $f(\xi) = 0$: le polynôme $P(X)$ admet au moins une racine complexe : le nombre ξ.