

La loi de Snell–Descartes et un problème d'optimisation

Énoncé

On considère dans le plan une droite horizontale Δ séparant deux milieux homogènes notés $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$, les régions $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ étant donc deux demi-plans ouverts séparés par la droite Δ .

On se donne un point $A \in \mathcal{M}_1$ situé à une distance $\ell_1 > 0$ de la droite Δ , puis un point $B \in \mathcal{M}_2$ situé à une distance $\ell_2 > 0$ de la droite Δ .

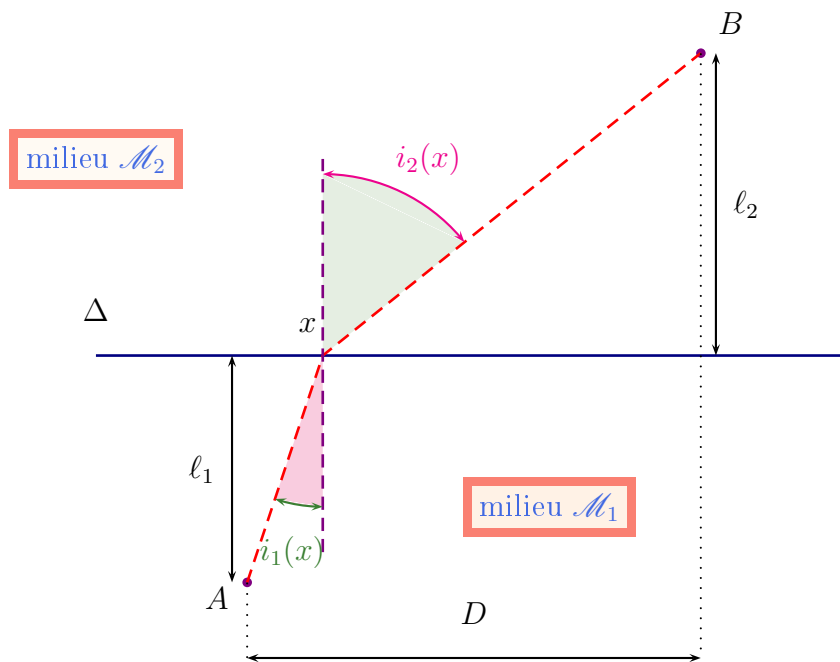
On note H_A et H_B les projetés orthogonaux des points A et B sur la droite Δ et on note $D = H_A H_B$, la distance séparant ces deux projetés.

Un objet part du point A en ligne droite vers la droite Δ et au point de contact M , l'objet se dirige alors en ligne droite vers le point B . La vitesse de propagation de l'objet dans le milieu $\mathcal{M}_1$ (respectivement dans le milieu $\mathcal{M}_2$) est égale à $v_1 > 0$ (respectivement égale à $v_2 > 0$).

1. Montrer qu'il existe un seul chemin permettant pour l'objet de minimiser son temps de trajet du point A vers le point B .
2. Proposer une explication à la loi optique de Snell-Descartes.

Solution

1. On propose la modélisation suivante :



On construit un repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé de façon à ce que les points A et B aient pour coordonnées :

$$A(0, -\ell_1) \text{ et } B(D, \ell_2).$$

La droite Δ est alors l'axe des abscisses.

En utilisant le théorème de Pythagore, la durée du trajet de l'objet du point A au point B en transitant par le point $M(x, 0)$ est donnée par la formule :

$$\delta(x) = \frac{\sqrt{\ell_1^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{\ell_2^2 + (D - x)^2}}{v_2}.$$

La fonction $\delta(\cdot)$ ainsi définie est clairement dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie de plus :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \delta(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \delta(x) = +\infty.$$

On sait alors – **exercice classique fait en cours à savoir refaire** – que la fonction δ admet un minimum global, atteint en un point x_0 .

Ce minimum global est un point d'annulation de la dérivée δ' , la fonction dérivée δ' valant :

$$\delta' : x \mapsto \frac{1}{v_1} \cdot \frac{x}{\sqrt{\ell_1^2 + x^2}} - \frac{1}{v_2} \cdot \frac{D - x}{\sqrt{\ell_2^2 + (D - x)^2}}.$$

Il est facile de voir que :

$$\forall x \leq 0, \delta'(x) < 0 \text{ et } \forall x \geq D, \delta'(x) > 0.$$

On en déduit que le point x_0 où la fonction δ réalise un minimum global vérifie :

$$x_0 \in]0, D[.$$

En notant M_0 le point de la droite Δ d'abscisse x_0 , alors l'égalité $\delta'(x_0) = 0$ se réécrit :

$$\frac{1}{v_1} \cdot \frac{H_A M_0}{A M_0} - \frac{1}{v_2} \cdot \frac{H_B M_0}{B M_0} = 0.$$

Lorsque x est un réel, en notant M le point de coordonnées $(x, 0)$, en notant $i_1 = i_1(x)$ et $i_2 = i_2(x)$ les angles non orientés formés entre la demi-droite $[M, A)$ et la verticale descendante au point M et entre la demi-droite $[M, B)$ et la verticale ascendante au point M , alors pour tout $x \in]0, D[$, on a :

$$i_1(x) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\text{ et } i_2(x) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Or, on voit que pour tout $x \in]0, D[$,

$$\tan(i_1(x)) = \frac{x}{\ell_1} \text{ et } \tan(i_2(x)) = \frac{D - x}{\ell_2}.$$

Il est alors clair que :

$$\forall x \in]0, D[, i_1(x) = \arctan\left(\frac{x}{\ell_1}\right) \text{ et } i_2(x) = \arctan\left(\frac{D - x}{\ell_2}\right).$$

La fonction $x \mapsto i_1(x)$ est strictement croissante sur $]0, D[$, alors que la fonction $x \mapsto i_2(x)$ est strictement décroissante sur $]0, D[$. La fonction $\sin$ étant strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, il est facile de voir que la fonction :

$$\delta' : x \mapsto \frac{\sin i_1(x)}{v_1} - \frac{\sin i_2(x)}{v_2}$$

est une fonction strictement croissante.

La fonction δ' est donc strictement croissante sur l'intervalle $]0, D[$: l'équation $\delta'(x) = 0$ n'admet qu'une seule solution sur $]0, D[$ et cette équation n'admet aucune solution sur $\mathbb{R} \setminus]0, D[$. On en déduit que la dérivée δ' ne s'annule qu'une seule fois sur $\mathbb{R}$: au point x_0 .

La fonction δ n'atteint sa valeur minimale qu'en un seul point : x_0 . Il n'y a qu'un seul chemin réalisant le minimum de durée de parcours.

2. On interprète la situation comme l'étude d'un trajet lumineux entre les points A et B , l'onde ayant une célérité égale à :

$$v_k = \frac{c}{n_k} \text{ dans le milieu } \mathcal{M}_k, \text{ pour } k \in \{1, 2\},$$

la constante c étant la célérité de la lumière dans le vide et n_k étant la valeur de l'indice dans le milieu $\mathcal{M}_k$.

Par la première question, le trajet lumineux demandant le moins de temps de parcours entre A et B est le trajet AM_0B tel que les angles d'incidence i_1 et de réfraction i_2 vérifient :

$$\frac{\sin i_1}{v_1} = \frac{\sin i_2}{v_2},$$

ou encore en multipliant le tout par c :

$$n_1 \cdot \sin i_1 = n_2 \cdot \sin i_2.$$

On retrouve une loi bien connue ...

Est-ce à dire que le photon voulant aller de A vers B a déjà calculé sa trajectoire pour emprunter le bon chemin afin d'optimiser son temps de trajet ... ?
