Aide à la compréhension sur le cours des séries

Les premières notions

Une série est une suite, c'est la suite des sommes partielles. Dans ce chapitre, on va essentiellement appliquer ce que l'on connaît sur les suites.
Il est à noter que le symbole $\sum_n u_n$ désigne donc une série (donc une suite de sommes partielles) alors que le symbole $\sum_{n=0}^{N} u_n = S_N$ désigne un nombre : c'est une somme partielle. En cas de convergence de la série, on note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ la limite de cette série : c'est un nombre.
Parfois, et il arrivera que cela se produise notamment pour des raisons pratiques, on notera $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ pour une série et non pour la somme d'une série convergente. C'est pratique pour donner l'information suivante : à partir de quel terme les u_n sont-ils définis ? Le contexte ne laisse en général aucune ambiguité sur la signification de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$: soit c'est une série (donc potentiellement divergente ou convergente) soit on a déjà montré que la série convergeait et dans ce cas, si on voit « *calculer* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ » par exemple, il s'agit bien de calculer un nombre, donc la somme d'une série convergente dont le premier terme commence à l'indice 1.

On commence dans l'exemple 1 à parler de séries télescopiques : première catégorie de séries importantes. On a déjà vu les sommes télescopiques. Il s'agissait alors de sommes partielles télescopiques. En faisant varier l'indice n dans $\sum_{k=1}^{n}(v_{k+1} - v_k)$ par exemple, d'une somme télescopique, on définit une série télescopique.
Le premier point est facile :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

La série $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ est convergente de somme égale à 1. La série $\sum_{n=833}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ est encore convergente, de somme égale à $\frac{1}{833}$.

Le deuxième point généralise le premier à n'importe quelle série télescopique. Le très gros avantage des séries télescopiques est que l'on arrive toujours à calculer explicitement les sommes partielles. Étudier la série revient à étudier une quantité que l'on connaît. On a tout un gros chapitre *Suites* sur le sujet...

Le troisième point est essentiel également. On découvre notre deuxième catégorie de séries importantes : les séries géométriques. On peut voir ces séries un peu comme des séries télescopiques puisque si $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n}(q^k - q^{k+1}) = 1 - q^{n+1}.$$

Bien entendu, la formule de la somme géométrique est à savoir (mais c'est déjà connu) et ne pas oublier le premier terme dans la formule. On a tendance à l'oublier parfois.

On calque maintenant ce que l'on sait des suites (convergence ou divergence, limite, croissance, monotonie, valeurs d'adhérénce pourquoi pas ?) aux séries qui sont en fait des suites. Les définitions qui suivent sont aisément compréhensibles.
Que veut dire la question :

Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_n \frac{\cos n}{2+\sin n - \ln n}$ *?*

Réponse : c'est la même question que :

La série $\displaystyle\sum_n \frac{\cos n}{2+\sin n - \ln n}$ *est-elle convergente ou divergente ?*

Dans l'exemple choisi ci-dessus, vous pouvez vous amuser à répondre à la question. On s'aperçoit que les choses sont un peu compliquées... Tout cela pour dire que l'on pourra rencontrer des études compliquées, malgré tout.

La remarque 1 se comprend de la façon suivante. Si on vous donne deux séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$, la première commençant à l'indice n_0 et la seconde commençant à l'indice 0, en notant :

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k \text{ et } T_n = \sum_{k=0}^{n} u_k,$$

alors pour tout $n \geqslant n_0$, on a directement :

$$T_n = T_{n_0-1} + S_n.$$

La suite $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ converge si et seulement si la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Ainsi, les deux séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ sont simultanément convergentes ou simultanément divergentes. La nature de ces séries ne dépend pas des premiers termes, le calcul de leur somme (limite de série convergente) dépend bien évidemment des premiers termes, et on a un lien entre les deux sommes :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - \sum_{n=0}^{n_0-1} u_n.$$

Pour la proposition 1, la simplification $S_q - S_p$ est facile. Je ne détaille pas.
Le deuxième point paraît anodin : il est très important en fait. Voici la démonstration :

- Prendre une série $\sum_n u_n$ convergente. Avec cette notation, on ne sait pas trop à partir de quel indice sont définis les u_n, mais peu importe. Mettons que les u_n soient définis à partir de l'indice n_0.
- Pour tout $n \geqslant n_0$, on a cette brillante formule :

$$u_n = S_n - S_{n-1}.$$

- Comme la série est convergente, la suite $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ converge vers une limite ℓ. On sait alors que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} S_{n-1} = \ell$ (c'est une sous-suite !!) et donc directement :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \ell - \ell = 0.$$

La contraposé de ceci est que si u_n est une quantité qui ne tend pas vers 0, alors la série associée $\sum_n u_n$ diverge. On dit qu'elle diverge grossièrement.
On verra qu'il est tout à fait possible que u_n tende vers 0 mais que la série associée diverge malgré tout.

Les séries à termes positifs

Le **très gros avantage** d'étudier une série à termes positifs de terme général u_n est que la série $\sum_n u_n$ est **CROISSANTE** : c'est facile mais très important. Il ne peut arriver que deux choses à une telle série : soit elle est majorée auquel cas elle converge (vers on ne sait pas trop quoi), soit elle n'est pas majorée auquel cas elle diverge vers $+\infty$.
Démontrons dans la proposition 2 le deuxième point qui est facile, mais important dans la résolution de nos futurs exercices.

Si $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ sont deux séries à termes positifs, avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$ et si la série $\sum_n v_n$ converge, alors en notant $\ell = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ la somme de cette série convergente, en notant U_n les sommes partielles pour u_n et V_n les sommes partielles pour v_n, la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, de limite ℓ, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ V_n \leqslant \ell.$$

Résultat des courses :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} v_k = V_n \leqslant \ell.$$

La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est elle-même croissante, majorée par ℓ donc convergente et sa limite est inférieure à ℓ :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n,$$

qui peut aussi se voir maintenant (on sait que tout converge) comme un passage à la limite dans l'inégalité :

$$U_n \leqslant V_n.$$

Pour le troisième point, on refait les choses. Si $\sum_n u_n$ diverge, alors la série diverge vers $+\infty$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_n \leqslant V_n$$

et la quantité U_n tend vers $+\infty$, entraînant que la quantité V_n tend aussi vers $+\infty$.

On démontre la propriété 3.

Soient $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ deux séries à termes positifs tels que $u_n \underset{n\to+\infty}{\simeq} v_n$.
On suppose que la série $\sum_n u_n$ est convergente.
Par définition de l'équivalence de suite, il existe une suite $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite 1 telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n \times \rho_n.$$

On en déduit que la suite $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converente est bornée par une constante C, donc les termes positifs ρ_n sont majorés par C :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant v_n \leqslant C \cdot u_n.$$

La série $\sum_n C \cdot u_n$ reste convergente de somme égale à C multipliée par la somme de la série $\sum_n u_n$ (la constante C sort des sommes partielles et on passe ensuite à la limite).
On applique la proposition 2 (deuxième point) à $v_n \leqslant C \cdot u_n$ et tout est positif : la série $\sum_n v_n$ est bien convergente.
Dans l'autre sens, si $\sum_n v_n$ est convergente, on peut intervertir les rôles de u_n et v_n, car $v_n \underset{n\to+\infty}{\simeq} u_n$.

Quelques remarques importantes sur ce résultat.

- On a appris à se méfier de la relation « $\underset{n\to+\infty}{\simeq}$ ». On verra dans les exemples comment gérer tout cela avec les « $\circ()$ ».
- La proposition ne marche pas lorsque les termes ne sont pas positifs. Il est trop tôt pour donner un exemple mais on verra l'exemple de séries telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\simeq} v_n$, $\sum_n u_n$ converge et $\sum_n v_n$ diverge, lorsque les signes ne sont pas constants.
- Dans la propriété 3, il suffit que l'une des deux séries $\sum_n u_n$ ou $\sum_n v_n$ soit à termes positifs. En effet, si les u_n sont positifs et si $u_n \underset{n\to+\infty}{\simeq} v_n$, alors, $v_n \underset{n\to+\infty}{\simeq} u_n$ donc on écrit :

  $$v_n = \rho_n \times u_n,$$

  avec ρ_n de limite 1, lorsque n tend vers $+\infty$.

À partir d'un certain entier n_1, on peut écrire :

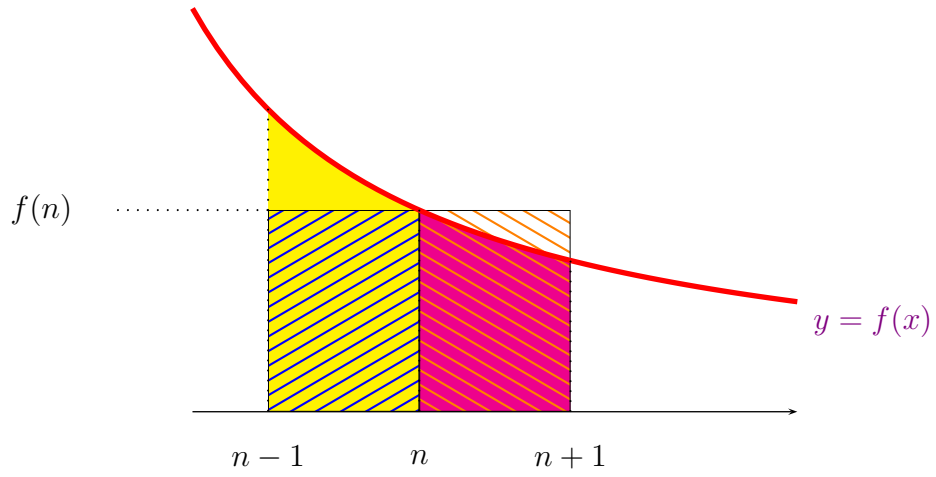
$$\forall n \geqslant n_1,\ \rho_n \geqslant \frac{1}{2}$$

donc $\forall n \geqslant n_1,\ v_n \geqslant \dfrac{u_n}{2} \geqslant 0$.
La série $\sum_n v_n$ est à termes positifs à partir d'un certain rang n_1 par exemple, et on sait que la nature de cette série ne dépend pas des premiers termes. On peut appliquer la proposition 3 aux séries $\sum_{n\geqslant n_1} u_n$ et $\sum_{n\geqslant n_1} v_n$.

Les séries de Riemann

La proprosition 4 est très importante : elle fait le lien entre ce qui se passe pour les séries et ce qui se passe pour les intégrales.
Chose importante pour pouvoir mettre en œuvre cette comparaison. La série étudiée doit être de la forme $\sum_n f(n)$, avec f une fonction continue par morceaux (continue dans le cours mais généralisable) et décroissante (lorsque la fonction f est croissante, il y a à peu près les mêmes choses possible et les inégalités obtenues sont dans l'autre sens.

Il faut retenir l'encadrement de $f(n)$ par les deux intégrales. Cet encadrement est visible sur le schéma suivant :



On a tracé la courbe $y = f(x)$ au moins sur le segment $[n-1, n+1]$. On compare des aires de domaines. L'aire jaune est $\int_{n-1}^{n} f$, l'aire magenta est $\int_{n}^{n+1} f$. Les deux rectangles hachurés ont la même aire, à savoir $1 \times f(n) = f(n)$ car la base est de longueur 1 pour les deux rectangles et la hauteur est égale à $f(n)$.
On voit sur le dessin que la plus petite aire est magenta, puis l'aire hachurée de l'un des deux rectangles, puis l'aire jaune.
Plus formellement, on obtient cet encadrement de la façon suivante.

On fixe un entier naturel n.
Pour tout $t \in [n, n+1]$, par décroissance de f,

$$f(t) \leqslant f(n).$$

On intègre cette relation entre n et $n+1$, ce qui donne :

$$\int_n^{n+1} f \leqslant \int_n^{n+1} f(n) = f(n).$$

De même en intégrant $f(n) \leqslant f(t)$ sur $[n-1, n]$, on obtient l'autre bout.

On montre maintenant le deuxième point de la proposition 4.

Le plus simple est de poser :

$$v_n = f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\ dt.$$

D'une part, chaque v_n est positif, par le premier point.
Ensuite, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, en utilisant une somme télescopique,

$$\sum_{n=1}^{N} v_n \leqslant \sum_{n=1}^{N} \left(\int_{n-1}^{n} f(t)\ dt - \int_n^{n+1} f(t)\ dt \right) = \int_0^1 f - \int_N^{N+1} f.$$

On distingue deux cas :

- si la fonction f est positive, alors pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^{N} v_n \leqslant \int_0^1 f.$$

  La série à termes positif $\sum_n v_n$ est majorée donc converge.

  Or, les sommes partielles valent :

$$\sum_{n=1}^{N} v_n = \left(\sum_{n=0}^{N} f(n) - \int_0^{N+1} f \right) - f(0) + \int_0^1 f.$$

  La quantité $\sum_{n=0}^{N} f(n) - \int_0^{N+1} f$ est convergente, lorsque N tend vers $+\infty$. Par conséquent, la quantité $\sum_{n=0}^{N} f(n)$ est convergente si et seulement si la quantité $\int_0^{N+1} f$ est convergente, lorsque N tend vers $+\infty$, ce qui est équivalent au fait que la quantité $\int_0^N f$ est convergente lorsque N tend vers $+\infty$ (puisque tout ceci est équivalent au fait que les quantités (croissantes en N) $\int_0^{N+1} f$ ou $\int_0^N f$ soient majorées).

- si la fonction f n'est pas positive, il existe $x_0 > 0$ tel que $a = f(x_0) < 0$. Par décroissance de f,
$$\forall x \geqslant x_0,\ f(x) \leqslant a < 0.$$
On en déduit qu'il est impossible que $f(n)$ tende vers 0, lorsque n tend vers $+\infty$. La série $\sum_n f(n)$ à termes négatifs à partir d'un certain rang est grossièrement divergente, donc diverge vers $-\infty$ (série décroissante à partir d'un certain rang car termes négatifs). D'autre part, pour tout entier $n \geqslant x_0$:
$$\int_0^n f = \int_0^{x_0} f + \int_{x_0}^n f \leqslant \int_0^{x_0} f + \int_{x_0}^n a = \int_0^{x_0} f + a(n - x_0),$$
de limite $-\infty$, lorsque n tend vers $+\infty$, entraînant que :
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_0^n f = -\infty.$$

Quoiqu'il arrive, les deux suites $\left(\sum_{n=0}^N f(n)\right)_{N\in\mathbb{N}}$ et $\left(\int_0^N f\right)_{N\in\mathbb{N}}$ sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.

Passons à une application de cette méthode sur l'exemple.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose dans la suite la fonction :
$$f : \left| \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{t^\alpha} = t^{-\alpha} \end{array} \right. .$$

$\triangleright$ Déjà, lorsque $\alpha \leqslant 0$, la quantité $f(n)$ ne tend pas vers 0, donc la série associée est graossièrement divergente.
$\triangleright$ Plaçons-nous dans le cas où $\alpha > 0$. La fonction f ci-dessus est continue, décroissante sur $[1, +\infty[$. On envisage la méthode de comparaison série / intégrale.
Ce que je conseille est de dérouler les calculs qui suivent dans tous les cas.
Comme f n'est définie qu'à partir de 1 (surtout pas définie en 0 en tout cas) on a l'encadrement suivant **pour tout entier** $n \geqslant 2$:
$$\int_n^{n+1} f \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^n f.$$

En posant $S_n = \sum_{k=1}^n f(k)$ la somme partielle de la série de Riemann, alors on doit laisser de côté le premier terme que l'on met donc à part, ce premier terme valant $f(1) = 1$. Voici les calculs assez systématiques à faire, une fois que l'on somme :
$$\forall n \geqslant 2,\ 1 + \int_2^{n+1} f \leqslant 1 + \sum_{k=2}^n f(k) \leqslant 1 + \int_1^n f.$$

La série de Riemann est croissante.
On distingue deux cas selon la valeur de α, pour avoir une primitive de la fonction f.

$\longrightarrow$ si $\alpha > 1$, alors une primitive de f est :

$$F : t \longmapsto \frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1},$$

donc :

$$\forall n \geqslant 2,\ \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant 1 + \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^n = 1 + \frac{1}{\alpha-1} - \frac{n^{-\alpha+1}}{\alpha-1} \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha-1} = \frac{\alpha}{\alpha-1}.$$

La série de Riemann croissante est majorée, donc convergente dans ce cas.

$\longrightarrow$ si $\alpha = 1$, alors une primitive de f est ln.

C'est ici l'autre partie de l'encadrement qui va nous être utile :

$$\forall n \geqslant 2,\ 1 + \int_1^{n+1} f \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k),$$

donc $1 + \ln(n+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k)$, entraînant que les sommes partielles tendent vers $+\infty$, lorsque n tend vers $+\infty$.

La série de Riemann diverge vers $+\infty$ dans ce cas.

$\longrightarrow$ lorsque $\alpha \leqslant 1$, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n^\alpha},$$

donc $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.

Par le point précédent, la somme partielle H_n tend vers $+\infty$, entraînant que la somme partielle S_n également.

La série de Riemann diverge vers $+\infty$ dans ce cas.

Lorsque $\alpha = 1$, la série de Riemann $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ s'appelle la série harmonique. C'est un contre-exemple à la réciproque dans la proposition 1. En effet, la série est divergente, mais pas grossièrement divergente. Dans une série, le fait de savoir que le terme général tend vers 0 **ne sert à rien** !!

Les séries absolument convergentes

Lorsque l'on a affaire à l'étude d'une série $\sum_n u_n$, parfois, les termes u_n ne sont pas tous positifs à partir d'un certain rang, ce qui rend plus compliquée son étude. En tout cas, on ne peut pas utiliser ce qui précède.

On tente alors d'étudier la série $\sum_n |u_n|$ qui n'est plus la même qu'avant, mais on peut avoir des liens entre l'une et l'autre, via la propriété 5 très importante.

Démontrons ce résultat.

Soit $\sum_n u_n$ une série absolument convergente (en abgrégé ACV). On part du principe que les u_n sont des complexes et donc que $|u_n|$ est le module de u_n.
La série $\sum_n |u_n|$ est donc convergente (en abgrégé CV).
Pour tout réel x, on note :

- x^+ sa partie positive : $x^+ = x$ si $x \geqslant 0$ et $x^+ = 0$, si $x < 0$
- x^- sa partie négative : $x^- = 0$ si $x \geqslant 0$ et $x^- = -x$, si $x < 0$. Une partie négative est toujours positive (c'est comme cela).

Ainsi, pour tout réel x, on a toujours $x^+ \geqslant 0$, $x^- \geqslant 0$ et :

$$x = x^+ - x^- \text{ et } |x| = x^+ + x^-.$$

Pour tout complexe z, on peut donc noter :

$$z = (\Re e(z)^+ - \Re e(z)^-) + i(\Im m(z)^+ - \Im m(z)^-).$$

Pour tout entier n, on met le complexe u_n sous la forme :

$$u_n = a_n - b_n + i(c_n - d_n),$$

avec $a_n = \Re e(u_n)^+$, $b_n = \Re e(u_n)^-$, $c_n = \Im m(u_n)^+$ et $d_n = \Im m(u_n)^-$.
Ainsi, chaque a_n, b_n, c_n et d_n est positif et de plus,

$$0 \leqslant a_n + b_n = |\Re e(u_n)| \leqslant |u_n| \text{ et } 0 \leqslant c_n + d_n = |\Im m(u_n)| \leqslant |u_n|.$$

En notant σ la somme de la série croissante $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$, alors :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \sum_{n=0}^{N} a_n \leqslant \sum_{n=0}^{N} |u_n| \leqslant \sigma.$$

La série croissante $\sum_n a_n$ est majorée, donc converge. On peut réiter ce raisonnement aux trois autres séries de terme général b_n, c_n ou d_n.
Conclusion, comme l'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel, alors la série $\sum_n u_n = \sum_n a_n - \sum_n b_n + i\sum_n c_n - i\sum_n d_n$ reste convergente.
Enfin, pour tout $N \in \mathbb{N}$, par l'inégalité triangulaire, on écrit :

$$\left|\sum_{n=0}^{N} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{N} |u_n|.$$

On a maintenant le droit de passer à la limite lorsque N tend vers $+\infty$, puisque tout converge. On obtient l'inégalité de la propriété 5, qui peut être maintenant vue comme une inégalité triangulaire généralisée sur les séries convergentes.

Il est trop tôt pour proposer un contre-exemple de série convergente mais non ACV donc absolument divergente [ADV])

Pas d'exemple pour l'instant, on voit les calculs une fois qu'on a vu le reste et on compilera tous les résultats.

Les séries alternées

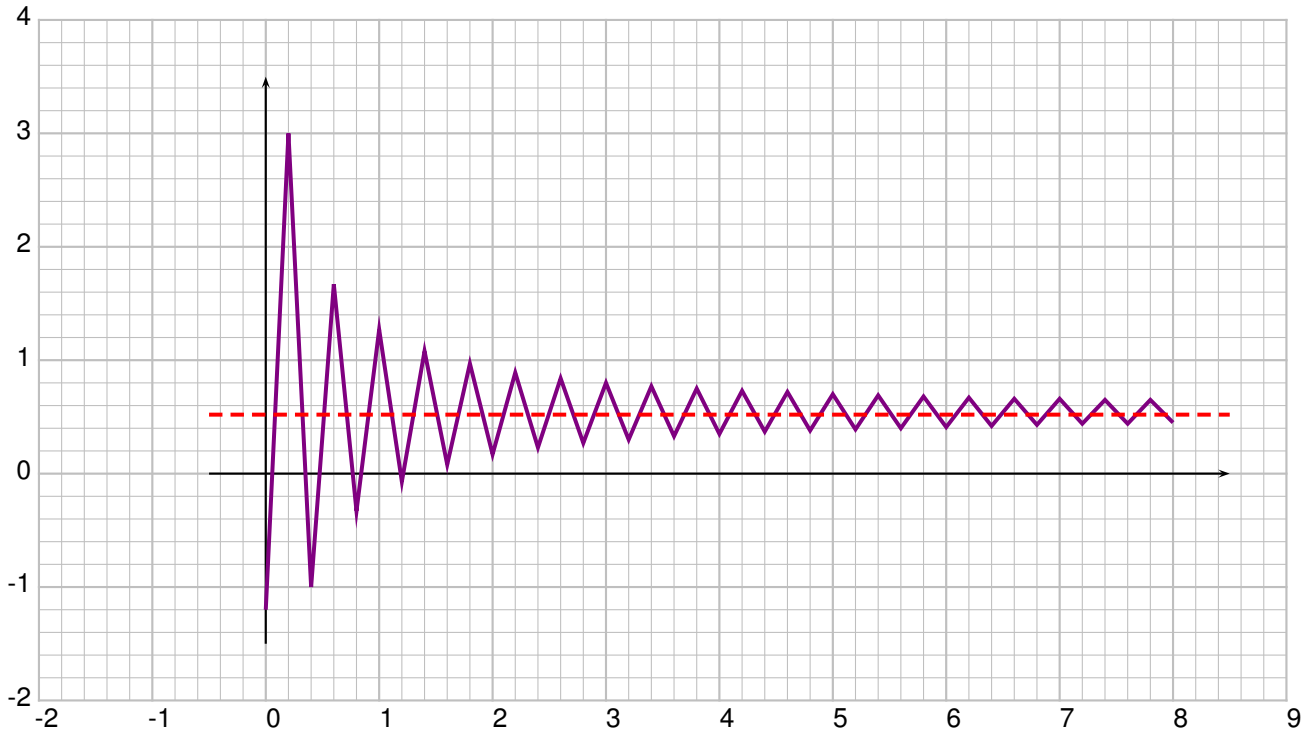
Typiquement, une série alternée se détecte de la façon suivante : c'est une série du type :

$$\sum_n (-1)^n \, \varepsilon_n,$$

avec $\varepsilon_n \geqslant 0$. Les termes sont alors bien alternés.

La propriété 6 est connue sous la nom de « **Critère Spécial des Séries Alternées** »[en abgrégé CSSA]. Il ne faut pas oublier l'hypothèse de décroissance en module vers 0.

Sous les hypothèses, voici à quoi ressemble graphiquement un tracé de sommes partielles, et là encore, les choses sont assez visibles :



Ce graphique représente la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, lorsque les u_k vérifient les trois hypothèses du CSSA. On voit que les deux sous-suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ semblent adjacentes. On voit aussi que si ℓ est la somme de la série dont on va montrer qu'elle est convergente, alors les sommes partielles sont de part et d'autre de la limite ℓ.

Démontrons la propriété 6.
Sous les hypothèses, avec par exemple comme, sur le schéma ci-dessus, $u_0 \leqslant 0$. Dans ce cas de figure, tous les termes d'indices pairs sont négatifs et tous les termes d'indices impairs sont positifs.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} + u_{2n+1} = -|u_{2n+2}| + |u_{2n+1}| \geqslant 0.$$

La sous-suite $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
De même,

$$S_{2n+3} - S_{2n+1} = u_{2n+3} + u_{2n+2} = |u_{2n+3}| - |u_{2n+2}| \leqslant 0.$$

La sous-suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1},$$

de limite nulle.
Conclusion, les deux suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, donc convergentes vers la même limite ℓ et comme :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} S_{2n} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} S_{2n+1} = \ell,$$

alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elle-même converge vers ℓ. La série $\sum_n u_n$ est convergente.

On est en mesure de fournir un exemple de série CV mais pas ACV.
En posant $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, alors la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ est la série harmonique (de Riemann avec $\alpha = 1$) divergente mais cette série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ vérifie le CSSA : elle est convergente. Il s'agit d'une série de Riemann alternée.

Une dernière remarque sur le CSSA. On peut l'appliquer à condition que la série $\sum_n u_n$ vérifie :

- les u_n sont alternés à partir d'un certain rang
- la quantité $|u_n|$ est décroissante à partir d'un certain rang et de limite nulle.

Comme la nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes (prendre seulement un nombre fini de premiers termes), alors la série $\sum_n u_n$ converge quand même sous ces hypothèses un peu moins fortes.

Les séries de référence

On fait ici un récapitulatif des séries à connaître : les séries de Riemann (intervient de manière implicite une comparaison série / intégrale), les séries géométriques dont on peut calculer la somme en cas de convergence (formule à retenir bien évidemment) et les séries télescopiques déjà vues.

On détaille ce qui se passe pour la série exponentielle un peu moins importante.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
$\triangleright$ Si x est nul, alors tous les termes $\dfrac{x^n}{n!}$ sont nuls à partir de $n = 1$. La série est convergente de somme égale au premier terme qui est $1 = \exp(0) = \exp(x)$.

▷ Si x est non nul, on pose $u_n = \dfrac{x^n}{n!}$, de sorte que :

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|x|}{n+1},$$

de limite nulle.
Il existe n_0 assez grand pour que :

$$\forall n \geqslant n_0,\ \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \leqslant \frac{1}{2},$$

donc par récurrence,

$$\forall n \geqslant n_0,\ |u_n| \leqslant \frac{1}{2^{n-n_0}}\ |u_{n_0}| = \frac{C}{2^n},$$

où C est une constante.
La série géométrique $\displaystyle\sum_n \frac{C}{2^n}$ est convergente car la raison est en module strictement inférieure à 1.
Ensuite, tout est positif et par la propriété 2, la série $\displaystyle\sum_n |u_n|$ reste convergente (en fait croissante et majorée). La série $\displaystyle\sum_n u_n$ est donc ACV donc CV.

De plus, on peut appliquer la formule de Taylor avec reste intégral (la formule de Taylor-Lagrange marche aussi, mais cela nous fait réviser le chapitre précédent), on obtient avec la fonction $f = \exp$, $a = 0$ et $b = x$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\ x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \varepsilon_n,$$

avec :

$$|\varepsilon_n| \leqslant \left| \int_0^x \frac{|x|^n}{n!} e^{|x|}\ dt \right| = \circ(1).$$

On a ce qu'il faut.

Les études de séries en pratique

On a vu assez peu d'exemples de séries pour l'instant. On a tout ce qu'il faut pour mettre les résultats précédents en pratique.

On redétaille la méthode très importante de la page 5. On met en place un code couleur. En vert, c'est la réponse favorable à la question posée. En rouge, c'est la réponse défavorable à cette question. On ajoute des exemples de séries qui rentrent dans le cadre de chaque situation avec en dernier exemple, un exemple un peu plus difficile en général. Je vous laisse le soin de voir tout cela si vous avez du temps...

Soit $\displaystyle\sum_n u_n$ une série de nombres complexes. La série est-elle convergente ? ou divergente ?

Question à se poser : le terme général u_n tend-il vers 0 ?

- Réponse non. Dans ce cas, la série DVG (diverge grossièrement) et c'est fini.
- Réponse oui. Dans ce cas, tout peut arriver comme le montrent les exemples $\sum_n \frac{1}{n}$ (DV) ou $\sum_n \frac{1}{n^2}$ (CV)

On se place dans le cas où $u_n \longrightarrow 0$, lorsque n tend vers $+\infty$ dans la suite.

Nouvelle question à se poser : la série est-elle à termes positifs ?

- Réponse oui. Dans ce cas, la série est croissante. Pour montrer sa divergence, on essaiera d'avoir une inégalité du type $u_n \geqslant \frac{1}{n}$ à partir d'un certain rang, et pour avoir sa convergence, on essaiera d'avoir une inégalité du type $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^2}$ par exemple à partir d'un certain rang. Exemples : $\sum_n \frac{1}{n^2+\cos n}$, $\sum_n \frac{2^n}{3^n-n^2}$ ou $\sum_n \frac{1}{n\ \ln n}$
- Réponse non. Dans ce cas, on passe à la question suivante...

La série vérifie-t-elle le CSSA ?

- Réponse oui. Dans ce cas, la série est immédiatement convergente Exemples : $\sum_n \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ pour $\alpha > 0$, $\sum_n \frac{(-1)^n}{n+\frac{\cos n}{n^2}}$
- Réponse non. Dans ce cas, on passe à la question suivante...

Nouvelle question à se poser : la série est-elle ACV ?

- Réponse oui. Dans ce cas, la série est immédiatement convergente. Exemples : $\sum_n \frac{\cos n}{n^2+\cos n}$, $\sum_n \frac{\sin(n^2)}{3^n-n^2}$.
- Réponse non. Dans ce cas, on peut vraiment commencer à se faire du souci. Exemple : $\sum_n \frac{e^{in}}{n}$.

Dans le cas défavorable où on n'a eu que des réponses défavorables, on peut envisager de faire des groupements par paquets de signes constants, car les signes sont distribués de manière non exploitable a priori. On tombe ici uniquement sur des exemples un peu subtils...

Exemples : $\sum_n \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{\ln n}$, $\sum_n (10-n^{1/p_n})$ où p_n est le nombre de chiffres en base 10 de l'entier n.

Deux remarques très utiles. Si $u_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, alors u_n est de série absolument convergente (i.e. la série $\sum_n u_n$ sera ACV donc CV).

Si $u_n = \circ\left(\frac{1}{n}\right)$, alors on ne peut rien dire sur la série $\sum_n u_n$ car en prenant $u_n = \frac{1}{n^2}$, la série est CV, alors que si $u_n = \frac{1}{n\ln n}$ la série est DV. Pour ce faire, on peut appliquer la comparaison

série / intégrale à la fonction continue et décroissante $f : t \longmapsto \dfrac{1}{t\ \ln t}$ sur $[2, +\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_2^n f = \ln(\ln n) - \ln(\ln 2))$ tend vers $+\infty$, donc la série $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n\ \ln n}$ est DV.

Passons aux études des séries de l'exemple 3...

La série harmonique est DV (comparaison série / intégrale).
Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\ln^\alpha n}{n^{3/2}} = \mathscr{O}\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right),$$

de série ACV, donc CV.
On pose pour la série suivante :

$$u_n = \frac{\lambda^{n \ln n}}{n!},$$

avec $\lambda > 0$.
Alors,

$$u_n \ \underset{n\to+\infty}{\simeq}\ \lambda^{n\ln n}\left(\frac{e}{n}\right)^n\ \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(n\ln n(\ln\lambda - 1) + n - \frac{1}{2}\ln n\right).$$

Tout est positif. La série $\displaystyle\sum_n u_n$ est de même nature que la série :

$$\sum_n \exp\left((\ln\lambda - 1)n\ln n + n - \frac{1}{2}\ln n\right)$$

qui malgré les apparences est plus facile. On pose v_n ce terme général :

$$v_n = \exp\left((\ln\lambda - 1)n\ln n + n - \frac{1}{2}\ln n\right).$$

On distingue trois cas, car ce qu'il y a entre parenthèses dans l'exposant est équivalent à $(\ln\lambda - 1)n\ln n$...

$\longrightarrow$ si $\lambda > e$, alors $C = \ln\lambda - 1 > 0$ et en prenant un réel a tel que $0 < a < C$, alors pour n assez grand :

$$Cn\ln n + n - \frac{1}{2}\ln n \geqslant an\ln n$$

donc pour n assez grand :

$$v_n \geqslant \exp(a\ n\ln n)$$

de limite $+\infty$. La série $\displaystyle\sum_n v_n$ est DVG.

$\longrightarrow$ si $\lambda < e$, alors $C = \ln\lambda - 1 < 0$ et en prenant un réel a tel que $C < a < 0$, alors pour n assez grand :

$$Cn\ln n + n - \frac{1}{2}\ln n \leqslant an\ln n$$

donc pour n assez grand :

$$0 \leqslant v_n \leqslant \exp(a\ n\ln n).$$

Or, $\exp(a\ n\ln n) = \circ\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, de série ACV, donc la série $\displaystyle\sum_n v_n$ est ACV.

$\longrightarrow$ si $\lambda = e$, alors $C = 0$ et :

$$v_n = \exp\left(n - \frac{1}{2}\ln n\right),$$

de limite $+\infty$. La série est DVG.

Typiquement, ici on fait un développement asymptotique pour obtenir un équivalent.
On obtient :

$$\begin{aligned} e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= e - \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= e - \exp\left(1 - \frac{1}{2n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{e}{2n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Surtout ici, il ne faut pas gérer le $\circ\left(\frac{1}{n}\right)$ séparément, parce que l'on ne peut rien en dire sur la nature de sa série associée. Soyez attentif à la rédaction qui suit.
Le terme $u_n = \frac{e}{2n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right)$ est équivalent à $\frac{e}{2n}$ qui est **positif**. Par comparaison des séries à termes positifs à partir d'un certain rang, la série $\sum_n u_n$ est de même nature que la série $\sum_n \frac{e}{2n}$, c'est-à-dire DV vers $+\infty$.
De même,

$$\begin{aligned} e^{-1} - \left(1-\frac{1}{n}\right)^n &= e^{-1} - \exp\left(n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= e^{-1} - \exp\left(-1 - \frac{1}{2n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{e^{-1}}{2n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\simeq} \frac{e^{-1}}{2n}$ et que tout est positif APCR, alors la série $\sum_n u_n$ est DV.

On continue avec l'exemple 4, mettant en jeu des situations un peu plus élaborées...
On met en place maintenant une rédaction efficace pour chaque série.

• On écrit : $\frac{\ln n}{n\sqrt{n}} = \circ\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right)$, de série ACV. La série est donc CV.
On écrit : $\frac{\cos n}{n^2} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, de série ACV, donc CV.
On écrit :

$$e^{1/n} - 1 = \frac{1}{n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right)$$

terme équivalent à $\frac{1}{n}$. Tout est positif et la série harmonique $\sum_n \frac{1}{n}$ diverge : la série initiale DV.
Plus difficile avec le arccos. Premièrement, si $\alpha < 0$, alors :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} 1 - \frac{1}{n^\alpha} = -\infty,$$

et le terme général ne sera pas toujours défini car la fonction arccos n'est définie que sur l'intervalle $[-1, 1]$: le nombre α ne peut être strictement négatif.
Ensuite, si $\alpha = 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\arccos\left(1 - \frac{1}{n^0}\right) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2},$$

terme général ne tendant pas vers 0 et la série DVG (diverge grossièrement).
Enfin, supposons $\alpha > 0$. Alors,

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} 1 - \frac{1}{n^\alpha} = 1,$$

donc :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \arccos\left(1 - \frac{1}{n^\alpha}\right) = \arccos(1) = 0.$$

La série ne diverge pas grossièrement et pour l'instant, c'est tout. La série peut DV ou CV. On ne le sait pas encore. On remarque que comme la fonction arccos prend uniquement des valeurs positives, alors la série est à termes positifs (donc croissante).
On établit un équivalent du terme général $u_n = \arccos\left(1 - \frac{1}{n^\alpha}\right)$. Ppur ce faire, on va établir un équivalent de $\arccos(1-h)$, lorsque h tend vers 0^+. Voici la démarche qu'il faut retenir. On ne peut déjà pas faire intervenir un développement limité puisque la fonction arccos n'est pas dérivable en 1. Voici le calcul proprement dit.
On pose $u(h) = \arccos(1-h)$ de sorte que $u(h)$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0^+ (h ne peut être négatif car sinon, $u(h)$ n'est pas défini).
De plus, $\cos(u(h)) = 1 - h$ et $\cos(u(h)) = 1 - \frac{u(h)^2}{2} + \circ(u(h)^2)$, par le DL de la fonction cos. Par conséquent,

$$1 - h = 1 - \frac{u(h)^2}{2} + \circ(u(h)^2),$$

puis :

$$h = \frac{u(h)^2}{2} + \circ(u(h)^2) = \frac{u(h)^2}{2} \times (1 + \circ(1)).$$

Résultat des courses, comme $u(h)$ est positif :

$$u(h) = \sqrt{\frac{2h}{1 + \circ(1)}} = \sqrt{2h(1 + \circ(1))} \sim \sqrt{2h}.$$

En définitive,

$$\arccos(1 - h) \sim \sqrt{2h}.$$

On revient à notre terme général u_n de départ et on peut annoncer que :

$$u_n = \arccos\left(1-\frac{1}{n^\alpha}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{n^\alpha}} = \frac{\sqrt{2}}{n^{\alpha/2}}.$$

Tout est positif donc la série $\sum_n u_n$ est de même nature que la série de Riemann $\sum_n \frac{1}{n^{\alpha/2}}$ (toute constante non nulle n'interfère jamais sur la nature d'une série, seulement sur la valeur de la somme d'une série éventuellement convergente).
La série $\sum_n \arccos\left(1-\frac{1}{n^\alpha}\right)$ est convergente si et seulement si $\alpha > 2$.

• Pour les deux séries suivantes, on voit du $(-1)^n$ un peu partout. On pressent le CSSA...
On va établir des développements asymptotiques (**comme les signes ne sont pas constants (soit positif APCR soit négatif APCR) on ne pourra pas utiliser d'équivalent**).
Si $\alpha \leqslant 0$, le terme $v_n = \ln\left(1-\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ n'est pas toujours bien défini car la quantité entre parenthèses est négative si n est pair. On considère uniquement le cas $\alpha > 0$. Le terme v_n tend vers 0 (ça ne sert à rien...)
On effectue un développement asymptotique. Question : jusqu'à où ? ? Réponse, jusqu'à avoir des termes exploitables. Re-question : qu'est-ce que cela veut dire ? Réponse : regardons sur le calcul qui suit. On forgera notre expérience sur l'exemple et on apprendra ainsi à mener des calculs efficaces, c'est-à-dire à aller au bon ordre dans les DL.
Déroulons le calcul, qui me semble important.
Lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\begin{aligned} v_n = \ln\left(1-\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) &= -\frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{(-1)^{2n}}{2n^{2\alpha}} + \circ\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha} - \frac{1}{2n^{2\alpha}} + \circ\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right). \quad \bigstar \end{aligned}$$

On dispose de trois termes. Si l'on regarde ces trois termes séparément, on va dans le mur. Expliquons pourquoi ! !
Le premier terme $\frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}$ est de série CV car le CSSA est applicable pratiquement immédiatement (les termes sont bien alternés, et en module, le terme décroit vers 0).
Le deuxième terme $-\frac{1}{2n^{2\alpha}}$ est négatif, de série CV si et seulement si $2\alpha > 1$ par les séries de Riemann.
Là on se dit : « *mais où est le problème ? ?* »
Occupons-nous du troisième terme $\circ\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$. Que faire de ce terme ? Réponse : rien. On ne peut rien en faire.
Conclusion, on ne peut pas savoir si la série $\sum_n v_n$ est CV ou non, car il nous manque l'information sur la nature de $\sum_n \circ\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$ et n'essayez pas d'avoir cette information. Il est impossible

d'en avoir une. Par exemple, on a déjà vu que $\sum_n \circ\left(\frac{1}{n}\right)$ pouvait CV ou DV en utilisant par exemple les deux séries $\sum_n \frac{1}{n^2}$ (CV) ou $\sum_n \frac{1}{n\ln n}$ (DV par une comparaison série / intégrale).
Revenons sur nos pas à l'endroit marqué d'une étoile ★.
Reprenons à cette ligne et on va interpréter non pas trois termes mais seulement deux termes : on va regrouper les deux derniers termes et on va voir ainsi toute la différence de raisonnement.
On réécrit :

$$v_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha} - \frac{1}{2n^{2\alpha}} + \circ\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha} - \left[\frac{1}{2n^{2\alpha}} + \circ\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)\right].$$

Le terme $\frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}$ est de série CV par le CSSA.
Le terme entre crochets $\left[\frac{1}{2n^{2\alpha}} + \circ\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)\right]$ est équivalent à $\frac{1}{2n^{2\alpha}}$, positif à partir d'un certain rang. La série associée au terme entre crochets est de même nature que la série $\sum_n \frac{1}{2n^{2\alpha}}$, c'est-à-dire CV si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$.
En conclusion, si $\alpha > \frac{1}{2}$, on a pu décomposer v_n en :

$$v_n = a_n + b_n,$$

avec $\sum_n a_n$ et $\sum_n b_n$ CV. On rappelle que l'ensemble des suites convergentes est un espace vectoriel. On rappelle donc que l'ensemble des séries CV est encore un espace vectoriel.
Lorsque $\alpha > \frac{1}{2}$, la série $\sum_n v_n$ est CV (ACV si $\alpha > 1$ mais pas ACV si $\alpha \leqslant 1$ car $|v_n| \underset{n\to+\infty}{\simeq} \frac{1}{n^\alpha}$ et tout est positif).
Lorsque $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$, la série $\sum_n b_n$ est DV alors que la série $\sum_n a_n$ est CV. De plus comme $b_n \underset{n\to+\infty}{\simeq} -\frac{1}{2n^{2\alpha}}$, (tout est négatif APCR) est de série DV vers $-\infty$, alors la série $\sum_n v_n$ est DV vers $-\infty$.
En résumé, la série $\sum_n v_n$ est CV si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$.

Faisons maintenant des calculs plus efficaces pour la série $\sum_n w_n$, avec :

$$w_n = \frac{(-1)^n}{(-1)^n + n^\alpha}.$$

Si $\alpha = 0$, le quotient n'est pas défini pour n impair.
Si $\alpha < 0$, le terme w_n tend vers 1, lorsque n tend vers $+\infty$ et la série DVG.
Si $\alpha > 0$, on effectue un développement asymptotique (surtout ne pas utiliser ici d'équivalent car les signes ne sont pas constants).

On obtient :

$$\begin{aligned} w_n &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\,\frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}} \\ &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\left(1-\frac{(-1)^n}{n^\alpha}+\circ\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha}-\left[\frac{1}{n^{2\alpha}}+\circ\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)\right]. \end{aligned}$$

Le terme $\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est de série CV par le CSSA.
Le terme entre crochets est équivalent à $\dfrac{1}{n^{2\alpha}}$. Tout est positif APCR, donc le terme entre crochets est de série CV si et seulement si $\alpha > \dfrac{1}{2}$.
Conclusion, la série $\displaystyle\sum_n w_n$ est CV si et seulement si $\alpha > \dfrac{1}{2}$ et lorsque $0 < \alpha \leqslant \dfrac{1}{2}$, la série $\displaystyle\sum_n w_n$ DV vers $-\infty$.

Remarque importante : prenons $\alpha = \dfrac{1}{2}$, donc :

$$w_n = \frac{(-1)^n}{(-1)^n+\sqrt{n}}.$$

Par ce qui précède, $\displaystyle\sum_n w_n$ est DV.
Or, $w_n \underset{n\to+\infty}{\simeq} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et la série $\displaystyle\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est CV par le CSSA. On tient un contre-exemple pour dire que les signes constants (positif ou négatif peu importe mais il faut que les termes soient de signe constant APCR) sont primordiaux pour pouvoir utiliser les équivalents et surtout avoir quelque chose d'exploitable.

• Pour la série suivante, on pose :

$$\xi_n = \sin\left(\pi n \exp\left(\sin\frac{1}{n}\right)\right).$$

On va faire (comme d'habitude maintenant) un développement asymptotique de ξ_n :

$$\begin{aligned} \xi_n &= \sin\left(\pi n \exp\left(\frac{1}{n}+\mathscr{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right) \\ &= \sin\left(\pi n\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+\mathscr{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right) \\ &= \sin\left(n\pi+\pi+\frac{\pi}{2n}+\mathscr{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{2n} + \mathscr{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \quad \text{, car si } N \in \mathbb{N},\ \sin(N\pi + x) = (-1)^N \sin x \\ &= \frac{(-1)^{n+1}\,\pi}{2n} + \mathscr{O}\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Le premier terme est de série CV par le CSSA alors que le deuxième terme est de série CV par comparaison avec une série de Riemann : la série $\sum_n \xi_n$ est CV.

On remarque que la série $\sum_n \xi_n$ n'est pas ACV car :

$$|\xi_n| \underset{n\to+\infty}{\simeq} \frac{\pi}{2n}, \text{ tout est positif et de série DV.}$$

La série $\sum_n \xi_n$ est ce qu'on appelle une série semi-convergente (série CV mais pas ACV).

• Étudions déjà la suite u définie dans l'exemple. On voit que si $n \geqslant 1$, alors :

$$u_n = -\frac{e^{u_{n-1}}}{n} < 0.$$

Ensuite, comme chaque u_n est négatif pour $n \geqslant 1$, alors $u_n = \mathscr{O}\left(\frac{1}{n}\right)$, donc la quantité u_n tend vers 0 et donc :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\simeq} -\frac{1}{n},$$

car la quantité $e^{u_{n-1}}$ tend vers 1.

Conclusion, $u_n \underset{n\to+\infty}{\simeq} -\frac{1}{n}$, tout est négatif (APCR) et la série associée est DV vers $-\infty$.

Ensuite, pour la série $\sum_n (-1)^n \cdot u_n$, on pressent le CSSA, mais surtout on n'applique pas directement le CSSA car il est trop pénible de savoir si le terme général décroit en module vers 0. On effectue une fois de plus un développement asymptotique.

On déroule les calculs :

$$\begin{aligned} (-1)^n\, u_n &= (-1)^{n+1}\, \frac{e^{u_{n-1}}}{n} \\ &= (-1)^{n+1}\, \frac{1 + \mathscr{O}\left(\frac{1}{n}\right)}{n} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \mathscr{O}\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned}$$

et là comme d'habitude, le premier terme est de série CV par le CSSA et le second est de série CV car de série ACV par comparaison avec les séries de Riemann.

• LE DERNIER POINT EST ARCHI-CLASSIQUE sur la constante d'Euler γ. Résultat à connaître et à savoir retrouver ! !

Il y a plusieurs méthodes mais voici la plus efficace. On va troquer l'étude de la suite

$$(u_n = H_n - \ln n)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

dont on veut montrer qu'elle converge (vers une constante γ) contre l'étude de la série télescopique associée $\sum_n (u_{n+1} - u_n)$.
On étudie $u_{n+1} - u_n$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= H_{n+1} - H_n - \ln(n+1) + \ln n \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \mathscr{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= -\frac{1}{n(n+1)} + \mathscr{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \mathscr{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

de série ACV.
La série télescopique $\sum_n (u_{n+1} - u_n)$ est convergente, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
Ne vous amusez pas à ne serait-ce que tenter de calculer cette constante d'Euler. Il y a pas mal de problèmes ouverts qui lui sont liés. Par exemple, on ne sait toujours pas si la constante γ est irrationnelle ou non.

On en déduit ainsi un comportement asymptotique des sommes partielles harmoniques :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \circ(1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n.$$

On a un équivalent de H_n en $\ln n$.
On a avec la constante γ le deuxième terme dans un développement asymptotique de H_n. On peut avoir autant de termes ultérieurs que l'on veut. Vous trouverez en ligne un fichier complet de calculs concernant cette constante d'Euler et un développement asymptotique de H_n, lorsque n tend vers $+\infty$.

On termine le chapitre par le calcul explicite de sommes de séries convergentes. Il est en général plus facile de répondre à la question :

« *Montrer que la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *est convergente et calculer sa somme* »,

que de répondre à la question :

« *Montrer que la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *est convergente* ».

En effet, pour la première question, le fait de devoir calculer la somme montre que la série à étudier va comporter des simplifications dans les sommes partielles, ce qui particularise fortement la série à étudier. Dans la seconde question, on peut avoir affaire à des séries compliquées convergentes et pour lesquelles le calcul de la somme s'avère présomptueux...

Traitons finalement l'exemple 5.

• La série $\displaystyle\sum_k \frac{k+2}{3^k}$ est convergente car le terme général est en $\mathscr{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$ de série ACV. Passons au calcul de sa somme. Pour ce faire, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$, et on tente de simplifier la somme partielle

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+2}{3^k}.$$

On utilise les techniques « habituelles » de sommation en remarquant que le terme $k+2$ est issu d'une dérivation.
On pose la fonction $f_n : x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^{k+2} = x^3\ \frac{1-x^n}{1-x}$, définie sur $I =]0,1[$.
La fonction f_n est polynomiale, donc dérivable et :

$$f_n' : x \longmapsto \sum_{k=1}^{n} (k+2)\ x^{k+1} = 3x^2\ \frac{1-x^n}{1-x} + x^3\ \frac{-nx^{n-1}(1-x)+1-x^n}{(1-x)^2}.$$

On en déduit qu'en posant $x_0 = \dfrac{1}{3}$, alors :

$$S_n = 3 \cdot f_n'(x_0),$$

le 3 provenant du fait que :

$$\sum_{k=1}^{n} (k+2)\ x^k = \frac{1}{x}\ \sum_{k=1}^{n} (k+2)\ x^{k+1},$$

dès que x est non nul.
En utilisant l'expression de $f_n'(x_0)$ sans le signe $\sum$, et en utilisant les croissances comparées pour avoir :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} n x_0^{n-1} = 0,$$

on obtient :

$$S = \lim_{n \longrightarrow +\infty} S_n = 3 \times \left(\frac{3x_0^2}{1-x_0} + x_0^3\ \frac{1}{(1-x_0)^2} \right) = \frac{7}{4}.$$

Conclusion,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{k+2}{3^k} = \frac{7}{4}.$$

On peut remarquer qu'il n'est pas forcément utile de démontrer d'abord que la série est convergente comme on l'a fait plus haut. Il suffit de calculer et simplifier la somme partielle S_n, puis de montrer que S_n admet une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$: la série convergera alors et on aura directement le calcul de la somme.

On peut là encore dire que le terme général de la série $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2+k-2}$ est en $\mathscr{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$ de série ACV, mais on peut également tout faire « directement ». Faisons comme cela pour changer. On fixe $n \geqslant 2$ un entier. On voit ici une somme télescopique via une décomposition en éléments simples :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2+k-2} \\ &= \frac{1}{3}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+2}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}-\sum_{k=4}^{n+2}\frac{1}{k}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right) \\ &= \frac{11}{18}+\circ(1). \end{aligned}$$

La suite des sommes partielles est donc convergente de limite $\frac{11}{18}$ et donc :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2+k-2} = \frac{11}{18}.$$

• Pour le dernier exemple du cours, on interprète la série comme une série télescopique.

On utilise la formule (bien connue ... ?) :

$$\forall 0 \leqslant a \leqslant b,\ \arctan(b)-\arctan(a) = \arctan\left(\frac{b-a}{1+ab}\right).$$

En prenant $a = k$ et $b = k+1$, on obtient cette belle formule :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \arctan(k+1)-\arctan k = \arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \forall N \in \mathbb{N}^*,\ S_N &= \sum_{k=1}^{N} \arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{N}\Big(\arctan(k+1)-\arctan(k)\Big) \\ &= \arctan(N+1)-\arctan(1), \end{aligned}$$

de limite $\frac{\pi}{4}$, lorsque N tend vers $+\infty$: la série converge et de somme $\frac{\pi}{4}$.

Remarques sur les séries de référence :

- les séries de Riemann sont très utiles pour déterminer la nature des séries. En ce sens, ce sont des séries relativement précises. En revanche, on ne peut pas calculer facilement leur somme. On note habituellement $\zeta(\alpha)$, la valeur de la somme :

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha},$$

  lorsque $\alpha > 1$.
  On retiendra pour la première année les choses suivantes. La valeur de $\zeta(2)$ est connue et vaut :

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

  Moins important : la valeur de $\zeta(4)$ est connue et vaut :

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}.$$

  En fait, la valeur de $\zeta(2k)$ est connue en tout entier pair supérieur à 2. La formule n'est pas extrémement compliquée mais elle est toujours de la forme :

$$\zeta(2k) = r_k \ \pi^{2k},$$

  où r_k est un nombre rationnel pas forcément toujours de la forme $\frac{1}{\text{entier}}$. Il faut attendre 1978 pour savoir que $\zeta(3)$ n'est pas rationnel. On ne sait toujours pas si $\zeta(5)$ est irrationnel...
- Les séries géométriques sont beaucoup plus grossières en terme de comparaison. C'est la raison pour laquelle on les utilise moins pour traiter la nature d'une série. En revanche, on peut facilement calculer leur somme...
- La série exponentielle est de moindre importance ici, mais elle sert à définir la fonction exp qui est très importante malgré tout.