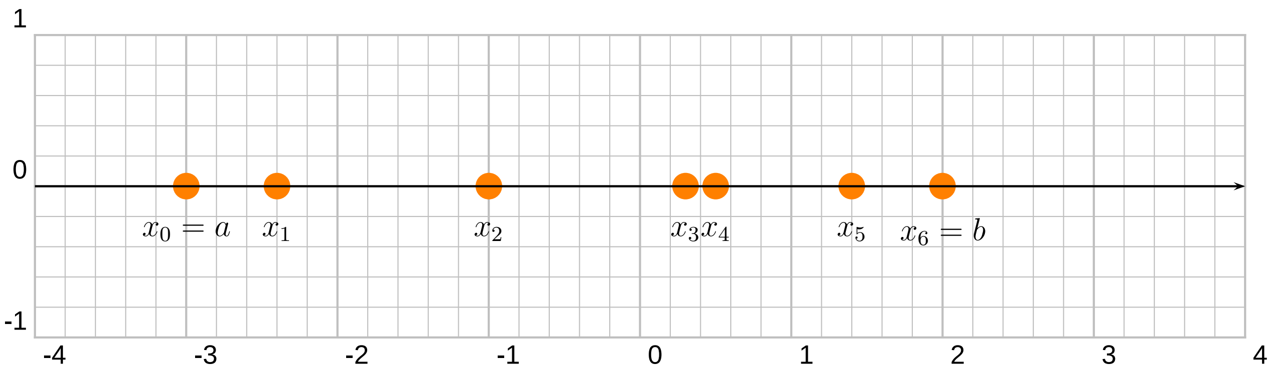
Aide à la compréhension sur le cours d'Intégration

Les subdivisions

Une subdivision d'un segment $[a, b]$ est en fait un découpage avec plus ou moins de points de $[a, b]$, le premier point de ce découpage étant toujours a et le dernier étant toujours b.
Le pas h_σ d'une subdivision σ de $[a, b]$ est la longueur maximale des « morceaux » qui composent ce découpage.
Plus le pas est petit, plus il y aura de points dans la subdivision.
En voici une représentation typique :



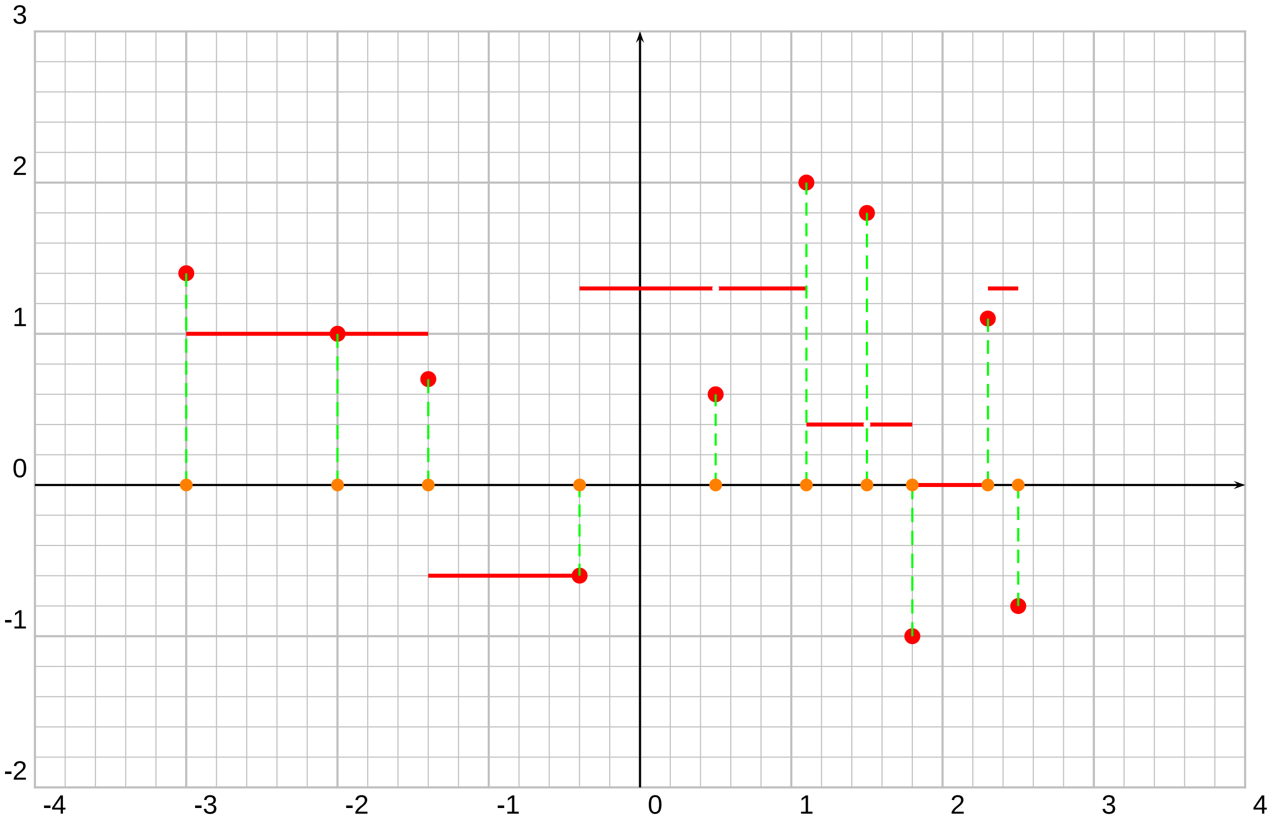
La propriété 1 est facile à montrer.
Pour l'exemple 1, on a un exemple avec :

$$\sigma = \left(0, \frac{1}{2}, 1\right) \text{ et } \sigma' = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right).$$

La relation $\preceq$ décrite dans la définition 1 est une relation d'ordre (réflexive, anti-symétrique et transitive) mais n'est pas totale. Les deux subdivisions de l'exemple 1 ci-dessus ne sont pas comparables pour la relation $\preceq$.
Pour le second point de l'exemple 1, l'ensemble $\{\sigma, \sigma'\}$ admet comme borne inférieure la subdivision $\sigma'' = \sigma \vee \sigma'$ obtenue en réunissant tous les points de subdivisions de σ et σ'. On vérifie facilement que c'est le meilleur minorant de $\{\sigma, \sigma'\}$.
L'ensemble $\{\sigma, \sigma'\}$ admet comme borne supérieure la subdvision où on a pris les points communs à σ et à σ'. Il y a au moins les points a et b, plus peut-être d'autres points ; cela dépend des subdivisions.
Cet exemple 1 est très peu important pour la suite du chapitre.

Les fonctions en escalier

Les subdivisions permettent de définir des fonctions spéciales qui sont constantes sur les morceaux ouverts des subdivisions.
En voici une représentation.



Les points orange (pas de s à orange ...) sur l'axe des abscisses sont les points définissant une subdivision adaptée à la fonction en escaliers f dont la courbe est en rouge. On remarque qu'il y a plusieurs subdivisions adaptées possibles en rajoutant arbitrairement des points à n'importe quelle subdivision déjà adaptée.
La subdivision du dessin n'est pas la meilleure. On peut enlever le point $(-2, 0)$ qui compte pour du beurre ici.
Pour la propriété 2, tout devient pratiquement évident en utilisant le fait que si f et g sont en escalier sur $[a, b]$, on a une subdivision σ adaptée à f, une subdivision σ' adaptée à g. On voit alors que la subdivision $\sigma'' = \sigma \vee \sigma'$ en prenant tous les points des deux subdivisions sera à la fois adaptée à f et g, donc la fonction $\lambda \cdot f + g$ sera constante sur chaque morceau ouvert de σ'' : c'est une fonction en escaliers. La fonction nulle marche et on a ce qu'il faut...
On définit l'intégrale d'une fonction en escaliers géométriquement comme l'« aire en dessous de la courbe », cette aire étant algébrique donc parfois comptée négativement. Il se trouve que les aires sont des aires de rectangles, d'où la somme proposée.
On voit que si l'on rajoute un point à une subdivision déjà adaptée, il y aura un rectangle qui sera coupé en deux sous-rectangles dont la somme des deux aires fera celle du gros rectangle. Cela explique que l'intégrale proposée ne dépende que de f et non pas des subdivisions adaptées

σ possibles. Il est à noter que l'intégrale ne dépend que des constantes des plateaux horizontaux des fonctions en escaliers mais pas des valeurs prises aux points de jonction. Si l'on prend une fonction en escalier f et que l'on modifie seulement un nombre fini de ses valeurs en un nombre fini d'abscisses, alors la nouvelle fonction obtenue restera en escaliers (pas avec la même subdivision mais peu importe) mais f et g auront la même intégrale. Géométriquement, on est en train de dire que l'aire d'un segment vertical est nulle et les domaines des points entre la courbe et l'axe des abscisses pour f et pour g ne diffèrent que d'un nombre fini de segments verticaux.

Le concept de fonction Riemann-intégrable est un peu plus difficile à dessiner.
Il faut s'imaginer une fonction bornée pas forcément continue sur un segment $[a, b]$.
Comme notre fonction f est bornée, il y a un minorant m et un majorant M. L'ensemble $\mathscr{E}_-$ de la définition 4 contient la fonction $\varphi : t \longmapsto m$ et l'ensemble $\mathscr{E}_+$ contient la fonction $\psi : t \longmapsto M$.
En prenant des subdivisions très fines de $[a, b]$, on peut tenter d'approcher par en dessous par des fonctions φ et par au-dessus par des fonctions ψ toutes en escaliers. Nécessairement comme $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$, alors :

$$\int_a^b \varphi \leqslant \int_a^b \psi.$$

La question est la suivante : les intégrales de n'importe quelle fonction φ sont inférieures aux intégrales de n'importe quelle fonction ψ. Ainsi,

$$\sup(\mathscr{I}_-) \leqslant \inf(\mathscr{I}_+).$$

A-t-on égalité ? Si oui, f est Riemann-intégrable et si non, f n'est pas Riemann-intégrable.
Lorsqu'on a égalité, on pose $\displaystyle\int_a^b f$ la valeur commune à la borne sup et à la borne inf pour ces deux ensembles.
Question compliquée pour l'instant : comment montrer que la fonction exp est Riemann-intégrable et comment calculer $\displaystyle\int_0^1 \exp$ par exemple ?
À ce stade du cours, il faut calculer les bornes inférieures et supérieures de $\mathscr{I}_-$ et $\mathscr{I}_+$, sachant que ces bornes ne sont pas du tout faciles à calculer...
On attendra impatiemment **LE** théorème du chapitre, le théorème 5.

Pour l'exemple 2, le premier point est facile. Si f est en escalier, alors $\varphi = f$ est dans $\mathscr{E}_-$ et $\psi = f$ est dans $\mathscr{E}_+$, donc la borne supérieure et la borne inférieure sont en fait un plus grand et un plus petit élément.
Pour le second point, prenons f la fonction indicatrice sur $[0, 1]$ de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels :

$$f : \left| \begin{array}{ccl} [0,1] & \longrightarrow & \{0,1\} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} 1, \text{ si } t \text{ est rationnel} \\ 0, \text{ sinon} \end{cases} \end{array} \right. .$$

Par densité de $\mathbb{Q}$ ou de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, si $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ sont deux fonctions en escaliers, sur chaque morceau ouvert d'une subdivision adpatée à φ et ψ, on trouve un rationnel r et un irrationnel i et donc sur ce morceau ouvert, φ et ψ sont des constantes que l'on note c_1 et c_2 avec :

$$c_1 = \varphi(i) \leqslant f(i) = 0 \text{ et } c_2 = \psi(r) \geqslant f(r) = 1.$$

Résultat des courses, $\displaystyle\int_0^1 \varphi \leqslant 0$ et $\displaystyle\int_0^1 \psi \geqslant 1$.
Les ensembles $\mathscr{I}_-$ et $\mathscr{I}_+$ ne vérifient pas la condition d'égalité pour leur borne supérieure ou inférieure : la fonction f n'est pas Riemann-intégrable.
Il a donc fallu aller chercher un exemple un peu subtil.
On va voir ci-après (cours de demain mardi) que toutes les fonctions de référence sont Riemann-intégrables.
Pour la propriété 3, les choses ne sont pas si faciles à montrer pour montrer que si f et g sont Riemann-intégrables sur $[a, b]$, alors $\lambda f + g$ aussi.
Vous pouvez essayer de le montrer en commençant par prendre $\varepsilon > 0$ pour trouver des fonctions $\varphi_1 \leqslant f \leqslant \psi_1$ et $\varphi_2 \leqslant g \leqslant \psi_2$ « proches » et ensuite distinguer les cas $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ (facile) ou $\lambda < 0$.
On pourra en reparler lorsque l'on se reverra mais la démonstration n'est vraiment pas utile.
Pour faire simple, le fait de savoir qu'une fonction est Riemann-intégrable seulement ne sert à rien.
On verra demain que toutes les fonctions continues par morceaux sont Riemann-intégrable et donc que l'on va pouvoir calculer des intégrales avec tout cela. Le fait de vérifier qu'une fonction est continue par morceaux sera beucoup plus facile...

Les fonctions continues par morceaux

Voici une représentation d'une fonction continue par morceaux avec une subdivision adaptée (points orange) non optimale, le point $(-2, 0)$ étant superflu.

On voit qu'une fonction continue par morceaux est toujours bornée et qu'en tout point $x_0 \in [a,b]$, la fonction continue par morceaux f admet toujours une limite finie à gauche et à droite en x_0, ces limites ne correspondant pas forcément à la valeur prise par la fonction en x_0.

Pour l'exemple 3, premier point, toute subdivision de $[a,b]$ sera adaptée à n'importe quelle fonction continue $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$.
Pour le deuxième point, la fonction proposée n'admet pas de limite finie en 0.
Une fonction C^p par morceaux est une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ pour laquelle il existe une subdvision $\sigma = (a = x_0 < \cdots < x_s = b)$ telle que sur chaque $]x_k, x_{k+1}[$ la fonction f est C^p et prolongeable en une fonction C^p sur $[x_k, x_{k+1}]$.

Pour le theorème 1, on va pouvoir calculer l'intégrale de n'importe quelle fonction continue par morceaux. Pour l'instant, on ne sait pas trop comment calculer efficacement cette intégrale, mis à part calculer $\inf(\mathscr{I}_+)$ par exemple, ce que l'on ne fera jamais...
Une ébauche de démonstration pour le théorème 1. Je vous laisse compléter les points de détail. Ne pas hésiter à retranscrire sur un dessin les informations de cette démonstration.

- prendre une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux
- prendre une subdivision $\sigma = (a = x_0 < \cdots < x_s = b)$ adaptée à f
- prendre $\varepsilon > 0$: le but est de construire $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ deux fonctions en escalier avec $0 \leqslant \psi - \varphi \leqslant \varepsilon$; on verra à la fin ce que l'on en fait
- pour chaque entier k entre 0 et $s-1$, considérer g_k la fonction $f_{|]x_k,x_{k+1}[}$ prolongée par continuité au segment $I_k = [x_k, x_{k+1}]$
- la fonction g_k est continue sur le segment I_k donc est **uniformément continue**
- il existe $\alpha_k > 0$ tel que :

$$\forall (x,y) \in I_k^2,\ |x-y| \leqslant \alpha_k \Longrightarrow |g_k(x) - g_k(y)| \leqslant \varepsilon.$$

- prendre $\alpha > 0$ le minimum des α_k lorsque k varie entre 0 et $s-1$
- prendre une subdivision σ' de $[a,b]$ adaptée à f et de pas $h_{\sigma'} < \alpha$.
- on pose $\sigma' = (y_0 = a < \cdots < y_r = b)$ subdivision a priori beaucoup plus fine que σ
- pour tout entier k entre 0 et $r-1$, la fonction g_k est continue sur $J_k = [y_k, y_{k+1}]$ et il existe deux nombres m_k et M_k tels que :

$$m_k \leqslant g_k \leqslant M_k.$$

  Comme m_k et M_k sont deux valeurs prises par g_k (théorème des bornes atteintes) en deux valeurs proches à α près, alors $0 \leqslant M_k - m_k \leqslant \varepsilon$
- on choisit φ fonction en escalier de subdivision adaptée σ' telle que sur $]y_k, y_{k+1}[$ $\varphi = m_k$; on choisit de même $\psi = M_k$ sur la même portion ouverte
- il reste à compléter φ et ψ en les points de jonction ; on prend n'importe quoi de façon à ce qu'en ces points de jonction on ait toujours $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$; le plus simple : prendre la valeur de f en ces points
- on tient donc deux fonctions en escalier $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ avec presque partout sauf en les points de jonction éventuellement $0 \leqslant \psi - \varphi \leqslant \varepsilon$
- on sait que $\displaystyle\int_a^b (\psi - \varphi) \leqslant \varepsilon(b-a)$
- on sait que $A = \displaystyle\int_a^b \varphi$ est dans $\mathscr{I}_-$ et que $B = \displaystyle\int_a^b \psi$ est dans $\mathscr{I}_+$

- alors en notant τ_- et τ_+ les bornes inférieures et supérieures de ces ensembles, on a :

$$A \leqslant \tau_- \leqslant \tau_+ \leqslant B$$

- par conséquent,

$$0 \leqslant \tau_+ - \tau_- \leqslant B - A \leqslant \varepsilon(b-a)$$

  et ce pour tout $\varepsilon > 0$;
- Conclusion : $\tau_- = \tau_+$ en faisant tendre ε vers 0^+, les quantités τ_- et τ_+ ne dépendant pas de ε.

En réadaptant la démonstration ci-dessus, on voit que dès qu'on a une subdivision de pas petit, dès que l'on prend ρ une fonction en escalier dont les constantes sur chaque plateau ouvert est une valeur prise par la fonction continue par morceaux f, alors $\displaystyle\int_a^b \rho$ sera proche de $\displaystyle\int_a^b f$. Détails techniques peu utiles pour la formalisation mais cela se voit en réutilisant les notions de démonstration ci-dessus.

Pour la démonstration de la propriété 4, il suffit alors de prendre une subdivision équirépartie :

$$\sigma = \left(a + k\frac{b-a}{n}\ ;\ 0 \leqslant k \leqslant n\right)$$

du segment $[a, b]$. L'approximation nous donne plutôt :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \times f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \simeq \int_a^b f.$$

Si l'on remplace la sommation $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}$ par $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}$ cela modifie la somme avec un terme en $\mathscr{O}(1)$. Divisé par n, il ne reste plus grand chose... La propriété 4 reste vraie lorsque k varie de 1 à n.
En Python, vous avez dû voir l'approximation des intégrales par des rectangles. Faites un dessin et vous vous apercevez que l'intégrale de la fonction en escalier ρ approchant f est la somme des aires de rectangles qui sont de base de plus en plus fines. On voit aussi qu'à la limite, l'aire converge lorsque n tend vers $+\infty$ vers l'aire du domaine entre l'axe des abscisses et la courbe $y = f(x)$ sur $[a, b]$.
Remarquons que la somme de Riemann est une moyenne de valeurs prises.

Pour l'exemple 4, appliquons la méthode à lire attentivement.
Premier point : on interprète comme une somme de Riemann :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}.$$

Il s'agit d'une somme de Riemann avec $f : t \longmapsto \dfrac{1}{1+t}$ et la limite vaut

$$\frac{1}{1-0}\int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln 2.$$

Pour l'instant, on n'est pas censé pouvoir calculer l'intégrale. On fait quand même...
Second point : on fait de même. Il faut faire attention au $2n$ en borne supérieure des indices. On obtient en utilisant $N = 2n$ plutôt que n :

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{n^2+k^2} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \frac{\frac{k}{N}}{1/4+\left(\frac{k}{N}\right)^2}.$$

On pose la fonction $g : t \longmapsto \dfrac{t}{1/4+t^2}$. La limite vaut :

$$\frac{1}{1-0}\int_0^1 g(t)\ dt = \left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{4}+t^2\right)\right]_0^1 = \frac{\ln 5}{2}.$$

La limite vaut $\dfrac{\ln 5}{2}$.

Pour le théorème 2, l'application proposée est une forme linéaire (non nulle) sur l'espace des fonctions Riemann-intégrables, ou l'espace des fonctions continues par morceaux. Le plus général est de considérer l'espace des fonctions Riemann-intégrables.
La démonstration est assez technique et utilise très fortement la même idée que pour montrer que l'ensemble des fonctions Riemann-intégrables est un espace vectoriel. Il faut approcher f et g par $\varphi_1 \leqslant f \leqslant \psi_1$, $\varphi_2 \leqslant g \leqslant \psi_2$ avec $\left|\displaystyle\int_a^b (\psi_1 - \varphi_1)\right| \leqslant \varepsilon$ et idem pour les indices 2 de façon que les intégrales de φ_1 et ψ_1 encadrent l'intégrale de f, et idem pour les indices 2 pour l'intégrale de g.
Prenez un scalaire réel λ et considérez $\lambda\varphi_1 + \varphi_2$ si $\lambda > 0$ ou $\lambda\psi_1 + \varphi_2$ si $\lambda < 0$. À chaque fois, on aura une fonction de escalier qui sera plus petite que $\lambda f + g$. On fait de même pour l'autre côté de l'inégalité avec $\lambda\psi_1 + \psi_2$ ou $\lambda\varphi_1 + \psi_2$ et on approchera $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + g)$ par $\lambda \displaystyle\int_a^b f + \int_a^b g$, à $C\ \varepsilon$ près avec une constante C. En faisant tendre ε vers 0, on obtient ce qu'il faut (le cas $\lambda = 0$ est trivial).

Les propriétés de l'intégrale

On peut calculer l'intégrale sur n'importe quel segment de n'importe quelle fonction Riemann-intégrable (pour l'instant très difficile à calculer), de n'importe quelle fonction continue par morceaux (pour l'instant difficile à calculer) et de n'importe quelle fonction en escalier (facile à calculer avec la définition).

Les propriétés de l'intégrale sont très utiles à exploiter dans les exercices.
La première propriété est la linéarité de l'intégrale, concept vu hier.
La deuxième propriété est la positivité de l'intégrale. Dans la suite, on appelle **intégrande**, la fonction que l'on intègre. Dans le théorème 3, le résultat est vrai à condition d'intégrer une fonction positive dans le bon ordre, c'est-à-dire entre a et b, avec a **plus petit que** b, sinon, cela inverse le signe. Ce sera une précaution à prendre systématiquement dans la suite des événements.

La démonstration est simple car si $f \geqslant 0$ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$, la fonction $\varphi = 0$ est dans $\mathscr{E}_-$ avec les notations antérieures du cours. Dès lors :

$$0 = \int_a^b \varphi \leqslant \sup(\mathscr{I}_-) = \int_a^b f.$$

Le corollaire $f \leqslant g \Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$ si $a \leqslant b$ utilise la linéarité et le fait que $g - f \geqslant 0$, donc $\displaystyle\int_a^b (g - f) \geqslant 0$.

L'inégalité triangulaire est très utile, largement utile en deuxième année dans la partie analyse du programme. Il suffit d'intégrer entre a et b, l'encadrement :

$$-|f| \leqslant f \leqslant |f|,$$

pour avoir :

$$-\int_a^b |f| \leqslant \int_a^b f \leqslant \int_a^b |f|$$

et d'utiliser pour tous réels α et x :

$$-\alpha \leqslant x \leqslant \alpha \Longleftrightarrow |x| \leqslant \alpha.$$

La propriété 5 porte un nom bizarre : théorème aux quatre hypothèses. La dénomination est communément comprise de vos futurs correcteurs ou examinateurs. Retenez ce théorème comme cela car il nécessite quatre hypothèses. Ce résultat s'utilise assez souvent en pratique. En voici une démonstration.

On va montrer que manière équivalente que si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction positive sur $[a, b]$ avec $a < b$, continue et non nulle sur $[a, b]$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ est strictement positive.

Les hypothèses ont changé par rapport au cours, mais il y a encore quatre hypothèses, et les choses demeurent équivalentes en utilisant le principe de contraposition.

- Prendre une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les 4 hypothèses à savoir $a < b$, $f \geqslant 0$, f continue et f non nulle.
- Choisir $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) \neq 0$, possible car f est non nulle ; on a alors $f(x_0) > 0$.
- Utiliser la continuité de f en x_0 : en prenant $\varepsilon = \dfrac{f(x_0)}{2} > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in [a, b] \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha],\ f(x) \geqslant \lambda = \frac{f(x_0)}{2}.$$

- L'ensemble $[a, b] \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ est un intervalle du type $[\xi_1, \xi_2]$, avec $\xi_1 < \xi_2$. Souvent, si x_0 est à l'intérieur de $[a, b]$ et si α est suffisamment petit, on a $\xi_1 = x_0 - \alpha$ et $\xi_2 = x_0 + \alpha$, mais x_0 peut être sur le bord et dans ce cas, le segment $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ déborde du segment $[a, b]$
- On pose la fonction en escalier φ :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \lambda, \text{ si } x \in [\xi_1, \xi_2] \\ 0, \text{ sinon} \end{cases} \end{array} \right. .$$

- On vérifie facilement que pour tout $x \in [a,b]$, $\varphi(x) \leqslant f(x)$, en distinguant deux cas selon que x soit dans $[\xi_1, \xi_2]$ ou non.
- Dès lors, $\varphi \in \mathscr{E}_-$, donc :

$$\sup(\mathscr{I}_-) = \int_a^b f \geqslant \int_a^b \varphi.$$

- Immédiatement,

$$\int_a^b \varphi = \lambda \times (\xi_2 - \xi_1) > 0.$$

- Conclusion alors acquise.

Le premier point de l'exemple 2 est là pour nous dire que chaque hypothèse est importante. On a tendance à oublier l'hypothèse « f continue ». Si vous retenez que le théorème s'appelle « théorème aux quatre hypothèses » alors vous n'oublierez pas cette hypothèse de continuité. En voici un contre-exemple : en prenant f la fonction indicatrice de $\{1\}$ sur $[0,2]$ (la fonction est nulle sur $[0,2]$ sauf en 1 où elle vaut 1), alors f est en escalier de subdivision adaptée $\sigma = (0,1,2)$ et par définition de l'intégrale de ces fonctions, $\displaystyle\int_0^1 f = 0$, sans que la fonction f ne soit nulle.
Pour le second point, soit $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme tel que : $\displaystyle\int_0^1 |P| = 0$.
La fonction $f : t \longmapsto |P(t)|$ est continue, positive d'intégrale nulle sur $[0,1]$, avec $0 < 1$ (on a nos quatre hypothèses). Conclusion, la fonction f est nulle.
Pour tout $t \in [0,1]$, $P(t) = 0$, donc le polynôme $P(X)$ admet une infinité de racines : c'est le polynôme nul ! ! Réponse : il n'y a que le polynôme nul qui convient.

La relation de Chasles est très utile également. Vous connaissez déjà ce résultat applicable même si les abscisses a, b et c ne sont pas dans cet ordre. Pour la démonstration, les choses sont un peu techniques. Voici la démarche dans les grandes lignes.

- Fixer trois nombres $a < b < c$
- Prendre une fonction f Riemann-intégrable sur $[a,c]$
- Poser g la restriction de f à $[a,b]$ et h la restriction de f à $[b,c]$; on ne sait pas encore que g et h sont Riemann-intégrables ...
- Prendre $\varepsilon > 0$.
- Choisir $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ avec φ et ψ en escalier sur $[a,c]$ avec de plus $\displaystyle\int_a^c (\psi - \varphi) \leqslant \varepsilon$ [possible car f est Riemann-intégrable]
- Prendre une subdivision σ adaptée à φ et ψ en rajoutant le point b si b ne faisait pas partie de cette subdivision
- prendre σ_1 et σ_2 les subdivisions obtenues à partir de σ en ne retenant que les points avant b pour σ_1 et après b pour σ_2 : σ_1 est une subdivision de $[a,b]$ et σ_2 est une subdivision pour $[b,c]$
- Prendre φ_1 et ψ_1 les restrictions de φ et ψ à $[a,b]$ et de même prendre φ_2 et ψ_2 les restrictions de φ et ψ à $[b,c]$.
- On voit que φ_1 et ψ_1 sont adaptées à σ_1 et surtout que :

$$\varphi_1 \leqslant g \leqslant \psi_1 \text{ et } \int_a^b (\psi_1 - \varphi_1) \leqslant \varepsilon,$$

et de même pour les indices 2 avec la fonction h. Ceci montre bien déjà que g et h sont Riemann-intégrables

- On voit aussi que, par définition des intégrales des fonctions en escalier :

$$\int_a^c \varphi = \int_a^b \varphi_1 + \int_b^c \varphi_2 \text{ et } \int_a^c \psi = \int_a^b \psi_1 + \int_b^c \psi_2.$$

- Conclusion :

$$\int_a^c f - \int_a^b g - \int_b^c h \leqslant \int_a^c \psi - \int_a^b \varphi_1 - \int_b^c \varphi_2 = \int_a^c (\psi - \varphi) \leqslant \varepsilon,$$

et :

$$\int_a^c f - \int_a^b g - \int_b^c h \geqslant \int_a^c \varphi - \int_a^b \psi_1 - \int_b^c \psi_2 = -\int_a^c (\psi - \varphi) \geqslant -\varepsilon.$$

Ainsi,

$$\left| \int_a^c f - \int_a^b g - \int_b^c h \right| \leqslant \varepsilon,$$

et ceci pour tout $\varepsilon > 0$.

- Faire tendre ε vers 0, pour avoir :

$$\int_a^c f - \int_a^b g - \int_b^c h = 0.$$

- Remarquer que :

$$\int_a^b g = \int_a^b f \text{ et } \int_b^c h = \int_b^c f.$$

On a ce qu'il faut.

Les primitives de fonctions continues

Voici venu le moment fatidique du chapitre où nous allons (re)-découvrir **LE** théorème du chapitre et surtout en avoir une démonstration.

On connaît déjà la définition 4, mais cela ne fait pas de mal.
On connaît déjà le théorème 5, mais cela ne fait vraiment pas de mal. Retenez que les mots « continue » et « intervalle » sont importants. On a vu leur importance lors des équations différentielles, en particulier pour la gestion des constantes qui étaient vraiment constantes là où des fonctions ne s'annulaient pas, avant de faire les raccords éventuels.

Démontrons en détail le théorème fondamental de l'analyse.

Fixons x_0 dans I.
Déjà la fonction $F : x \longmapsto \displaystyle\int_{x_0}^x f$ est bien définie car si $x > x_0$, alors la fonction f est continue sur le segment $[x_0, x]$, donc on a bien le droit de parler de son intégrale car f est alors continue par morceaux donc Riemann-intégrable. On voit ici comment les différentes notions antérieures s'imbriquent mutuellement. Si $x < x_0$, alors : $\displaystyle\int_{x_0}^x f = -\int_x^{x_0} f$ et la fonction f est

Riemann-intégrable sur $[x, x_0]$. Si $x = x_0$, la fonction f restreinte au singleton $[x_0, x] = \{x_0\}$ est d'intégrale nulle... La fonction F est donc bien définie sur l'intervalle I, le fait que I soit un intervalle est important car puisque $x_0 \in I$ et $x \in I$, alors le segment d'extrémités x_0 et x est inclus dans I.

Montrons maintenant que la fonction F ainsi définie sur I est bien dérivable. Pour ce faire, on prend α dans I et on étudie la limite éventuelle du taux de variations

$$\frac{F(\alpha + h) - F(\alpha)}{h},$$

lorsque h tend vers 0.
Plus précisément, on étudie la quantité :

$$\varepsilon(h) = \frac{F(\alpha + h) - F(\alpha)}{h} - f(\alpha),$$

et on croise les doigts pour avoir :

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Dans ce cas, on aura tout : F sera dérivable en α et $F'(\alpha) = f(\alpha)$.
Soit h non nul proche de 0 de telle sorte que $\alpha + h$ appartienne à I – pour garantir la bonne définition de $F(\alpha + h)$ ...
Alors, par les relations de Chasles, on obtient :

$$\begin{aligned}
\varepsilon(h) &= \frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{\alpha+h} f - \int_{x_0}^{\alpha} f\right) - f(\alpha) \\
&= \frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{\alpha+h} f + \int_{\alpha}^{x_0} f\right) - f(\alpha) \\
&= \frac{1}{h}\int_{\alpha}^{\alpha+h} f - f(\alpha) \\
&= \frac{1}{h}\int_{\alpha}^{\alpha+h} (f(t) - f(\alpha))\ dt
\end{aligned}$$

car si c est une constante comme c'est le cas pour $c = f(\alpha)$, alors :

$$\frac{1}{h}\int_{\alpha}^{\alpha+h} c\ dt = \frac{1}{h}\ c\ h = c.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue en x_0, on trouve $\eta > 0$ suffisamment petit pour que :

$$\forall t \in I,\ |t - \alpha| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(t) - f(\alpha)| \leqslant \varepsilon.$$

Prenons alors h non nul suffisamment petit pour avoir $|h| \leqslant \eta$ et bien entendu $\alpha + h \in I$. Dans ce cas, tous les éléments t entre α et $\alpha + h$ restent dans I (heureusement que I est un intervalle!!) et de plus,

$$|t - \alpha| \leqslant |h| \leqslant \eta.$$

Conclusion, avec ce choix de h, on a en utilisant l'inégalité triangulaire déjà vu dans le chapitre :

$$|\varepsilon(h)| \leqslant \frac{1}{|h|}\left|\int_{\alpha}^{\alpha+h} |f(t)-f(\alpha)|\ dt\right| \leqslant \frac{1}{|h|}\left|\int_{\alpha}^{\alpha+h} \varepsilon\ \right| = \varepsilon.$$

C'est bon. La démonstration de l'existence est terminée : il existe au moins une primitive de f s'annulant en x_0 : la fonction $F : x \longmapsto \displaystyle\int_{x_0}^{x} f$ convient.

Il reste le plus facile. Soit G une autre telle primitive de f s'annulant en x_0. La fonction $F-G$ est dérivable sur l'intervalle I et :

$$(F-G)' = F' - G' = f - f = 0.$$

La fonction $F-G$ est donc constante sur l'**intervalle** I et la constante vaut :

$$(F-G)(x_0) = F(x_0) - G(x_0) = 0.$$

Ainsi, $F = G$ et on a l'unicité !!

Pour démontrer que toutes les primitives de f sont déterminées à une constante près, c'est facile ! Si F est une primitive de f, alors pour toute constante c, $F+c$ ests dérivable de dérivée $F' = f$ donc on a déjà tout un stock de primitives pour la même fonction f mais il n'y en a pas d'autres car si G est une primitive de f, en posant F la primitive de f s'annulant en x_0, alors $G-F$ est dérivable de dérivée nulle sur l'intervalle I et donc $G-F$ est constante égale à c : $G = F + c$.

On a donc la démonstration complète.

Maintenant tout va aller très vite dans ce chapitre et c'est d'ailleurs avec les propriétés sur les intégrales et le théorème fondamental de l'analyse la partie importante – j'entends utile en pratique et dans la résolution des problèmes – du chapitre.

Pour l'exemple 6, en notant F une primitive de la fonction continue f sur $\mathbb{R}$, en posant la fonction :

$$G : x \longmapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\ dt,$$

alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = \Big[F(t)\Big]_{u(x)}^{v(x)} = F \circ v(x) - F \circ u(x).$$

Ainsi, $G = F \circ v - F \circ u$ est la différence de composées de fonctions dérivables : G est dérivable et on dérive le tout pour avoir :

$$G' = F' \circ v \times v' - F' \circ u \times u' = f \circ v \times v' - f \circ u \times u'.$$

Par exemple, la dérivée de $x \longmapsto \displaystyle\int_{0}^{x^2} f$ est $x \longmapsto 2xf(x^2)$ et la dérivée de la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_{e^x}^{3} f$ est $x \longmapsto -e^x\ f(e^x)$.

On rappelle alors des choses connues et très importantes sur les intégrales : catalogue de primitives (à apprendre par cœur si ce n'est déjà fait), les techniques d'intégration par partie et de changement de variables. Je passe rapidement, on connaît tout cela. Je traite les exemples du cours qui suivent.

Pour l'exemple 7, premier point, on cherche par exemple la primitie de ln s'annulant en 1. On calcule par IPP :

$$\forall x > 0, \int_1^x \ln t \; dt = \Big[t \; \ln t\Big]_1^x - \int_1^x t \times \frac{1}{t} \; dt = x \ln x - x + 1.$$

Une primitive de ln et $x \longmapsto x \ln x - x$ sur $]0, +\infty[$. Exemple et primitive fondamentaux.
On cherche ensuite la primitive de arctan s'annulant en 0 par exemple. On trouve pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^x \arctan t \; dt = \Big[t \; \arctan t\Big]_0^x - \int_0^x t \; \frac{1}{1+t^2} \; dt = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2).$$

On a ainsi une primitive . Exemple à savoir refaire, comme tous les exemples de n'importe quel cours d'ailleurs ...

Pour l'exemple 7, deuxième point, on va exprimer les I_n par récurrence.
Lorsque $n = 0$, $I_0 = 1$ directement et lorsque $n = 1$, on a $I_1 = \arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$ plus ou moins directement.
Si $n \geqslant 1$ est un entier naturel, on écrit successivement :

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \int_0^1 \frac{x^2 + 1 - x^2}{(x^2+1)^{n+1}} \; dx \\
&= I_n - \int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^{n+1}} \; x \; dx \\
&= I_n - \int_0^1 \left(x(x^2+1)^{-(n+1)}\right) \; x \; dx \\
&= I_n - \left(\left[\frac{1}{2} \frac{(x^2+1)^{-n}}{-n} \; x \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2n} (x^2+1)^{-n} \; dx \right) \\
&= I_n + \frac{1}{n \; 2^{n+1}} - \frac{1}{2n} I_n. \\
&= \frac{2n-1}{2n} \; I_n + \frac{1}{n \; 2^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Connaissant I_0, I_1 et cette formule de récurrence, on obtient de proche en proche les I_n. Il ne faut pas espérer avoir une formule exacte simple de I_n en fonction de n.

Pour le troisième point, il n'y a pas de formule toute faite, mais il faut utiliser une intégration par partie et toujours dériver le polynôme et toujours intégrer l'autre fonction, ici l'exponentielle. À force de dériver le polynôme plusieurs fois, on abaisse le degré tant et si bien qu'on tombe sur une intégrale du type $\displaystyle\int P^{(k)}(t) \; \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^k} \; dt$ et si $k > \deg(P)$, alors cette intégrale est nulle.

Pour l'exemple 8, premier point, on a déjà vu le calcul. Le plus simple et impressionnant : la courbe $y = \sqrt{1-x^2}$ est un quart de cercle de centre 0 et de rayon 1 donc l'aire en dessous de la courbe est $\dfrac{\pi}{4}$. Si l'on suit le changement de variable, on aboutit à des choses déjà traitées. En voici un détail (rappel) :

- $x = \cos t$ et $t = \arccos x$
- $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{\sin^2 t} = |\sin t| = \sin t$, car $t \in [0, \pi]$ et $\sin t \geqslant 0$
- $dx = -\sin t \times dt$
- anciennes bornes : $x : 0 \longrightarrow 1$; nouvelles bornes : $t : \arccos 0 = \dfrac{\pi}{2} \longrightarrow \arccos 1 = 0$
- nouvelle intégrale égale à l'ancienne :

$$\int_{\pi/2}^{0} \sin t \times (-\sin t)\ dt = \int_0^{\pi/2} \sin^2 t\ dt$$

- linéariser $\sin^2$ soit avec les formules trigonométriques, soit en passant en exponentielle complexe ; dans tous les cas, on sait faire et on obtient :

$$\sin^2 t = \frac{1-\cos(2t)}{2}$$

- On termine le calcul :

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ dx = \int_0^{\pi/2} \sin^2 t\ dt = \left[\frac{t - \frac{\sin(2t)}{2}}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

Pour le deuxième point de l'exemple 8, on suit l'indication. On obtient :

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^5 x}{1+\cos^4 x}\ dx = \int_{2\pi}^{0} \frac{-\sin^5 t}{1+\cos^4 t}\ (-dt)$$

car $\sin(2\pi - t) = -\sin t$ et $\cos^4(2\pi - t) = \cos^4 t$, puis $dx = -dt$.
On obtient que I vaut $-I$ et donc $I = 0$.
En traçant l'allure de la courbe, impaire et 2π périodique, on voit que le résultat est cohérent avec le fait que la valeur moyenne sur la période est nulle.

L'intégrale des fractions rationnelles

La méthode du paragraphe 2.5 se comprend assez bien. Mettons ceci en application.

Le premier point de l'exemple 9 consiste à trouver par exemple la primitive s'annulant en 0. Il s'agit donc de calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$I_n(x) = \int_0^x \frac{dt}{(t^2+1)^n}.$$

On peut calquer la démarche de l'exemple 7 deuxième point qui ressemble beaucoup.
Voici ce que cela donne tous calculs faits :

$$I_0(x) = x \text{ et } I_1(x) = \arctan x.$$

Ensuite, si $n \geqslant 1$ est un entier :

$$\begin{aligned} I_{n+1}(x) &= \int_0^x \frac{t^2+1-t^2}{(t^2+1)^{n+1}}\ dt \\ &= I_n(x) - \int_0^x \Big(t \cdot (t^2+1)^{-(n+1)}\Big) \times t\ dt \\ &= I_n(x) - \left[\frac{1}{2}\ \frac{(t^2+1)^{-n}}{-n} \times t\right]_0^x - \frac{1}{2n}\ I_n(x). \end{aligned}$$

On obtient alors $I_{n+1}(x)$ en fonction de $I_n(x)$ et de proche en proche, on peut calculer les $I_n(x)$. Il ne faut pas espérer une formule simple de $I_n(x)$ en fonction de n et de x et la question telle qu'elle est posée nous demande uniquement la méthode, pas le calcul explicite.

Pour le deuxième point de l'exemple 9, en notant $f : x \longmapsto \dfrac{x}{(x+1)^2(x-3)}$ la fonction f est une fraction rationnelle définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$ qui n'est pas un intervalle. On oublie de domaine de définition au profit d'un intervalle.
Prenons n'importe quel intervalle ne contenant ni -1 ni 3. On va déterminer une primitive de la fonction continue f sur cet intervalle I.
Première chose : décomposer en éléments simples la fraction rationnelle :

$$F(X) = \frac{X}{(X+1)^2(X-3)}.$$

On connaît par cœur la démarche. Tous calculs faits, on obtient :

$$F(X) = \frac{a}{X+1} + \frac{b}{(X+1)^2} + \frac{c}{X-3},$$

avec $b = \dfrac{1}{4}$, $c = \dfrac{3}{16}$ et ensuite $a = -\dfrac{3}{16}$.
On obtient une primitive suivante pour la fonction f sur l'intervalle I :

$$\varphi : x \longmapsto a\ \ln|x+1| - \frac{b}{x+1} + c\ \ln|x-3|.$$

En ce qui concerne les règles de Bioche, les résultats sont hors programme mais utiles. Donc on traite le sujet. Il n'est pas rare aux oraux de devoir les utiliser ou même lors des écrits, cela simplifie parfois les choses.

Il y a trois choses à comprendre dans la méthode :

- on ne peut appliquer la méthode que lorsque l'intégrale f est une fraction rationnelle en cos et sin.
  Il est envisageable d'appliquer cette méthode si $f : t \longmapsto \dfrac{\cos(6t) + \sin^{89}(t+1)}{\cos(3t+1) \times \sin^4(4t+9)}$ par exemple car chaque terme $\cos(pt)$ ou $\sin(qt)$ ou $\cos(3t+1)$ ou $\sin(at) \times \cos(bt)$ peut être mis sous la forme d'une somme de termes de la forme $\sin^k(t) \times \cos^\ell(t)$, en faisant par exemple intervenir les polynômes de Tchebychev. La fraction obtenue en cos et sin est innommable mais théoriquement on peut appliquer la méthode. La méthode ne s'applique pas pour les fonctions suivantes par exemple : $f : t \longmapsto \exp(\sin(t))$, $f : t \longmapsto \sqrt{2+\sin(3t)}$ ou $t \longmapsto \sin(2t) + t + \cos(3t)$ ou encore pour $f : t \longmapsto \ln(4 - 2\cos^2(t))$.

- le but est de trouver un bon changement de variable pour obtenir une nouvelle intégrale d'une fraction rationnelle. Pour trouver ce bon changement de variable, on considère la quantité $f(t)\ dt$ dans l'intégrale. Surtout ne pas oublier le « dt ». On teste les invariances éventuelles développées dans la méthode et on remarque que ces invariances sont les mêmes que les changements de variable que l'on va effectuer, si l'invariance est vérifiée. Par exemple, si $f(t)\ dt$ est invariant en remplaçant t par $-t$, on pose $u = \cos(t)$, $(\cos(-t) = \cos(t))$ ou si $f(t)\ dt$ est invariant par $t \longleftarrow \pi - t$, alors on posera $u = \sin t$, $(\sin(\pi - t) = \sin t)$ et idem pour la tangente. Lorsque rien ne marche, on posera $u = \tan \frac{t}{2}$...
- une fois le changement de variable effectué, on obtient **toujours** l'intégrale d'une fraction rationnelle. Si quand vous faites les calculs, vous n'obtenez pas une intégrande fraction rationnelle, c'est que vous n'avez pas effectué le bon changement de variable ou que vous avez fait une erreur de calcul !

Il peut arriver que pour une même intégrande f, la quantité $f(t)\ dt$ soit invariante par $t \longleftarrow -t$ par exemple. Dans ce cas, on peut utiliser le changement $u = \cos t$ ou bien quoiqu'il arrive le changement $u = \tan \frac{t}{2}$. Il vaut mieux toujours utiliser le premier changement de variable que le second car cela donnera une fraction rationnelle plus simple. Vous pouvez vous amuser sur les exemples – lorsqu'une invariance est possible – à tester malgré tout le changement de variable $u = \tan \frac{t}{2}$ pour voir en quoi les choses sont faisables mais plus compliquées.
Il faut faire attention aux bornes également. Parfois, il faut bricoler les bornes pour autoriser le changement de variable...

On détaille ici pourquoi lorsque f est une fraction rationnelle en cos et sin, lorsque l'on fait le changement de variable $u = \tan \frac{t}{2}$, alors la nouvelle intégrande est toujours une fraction rationnelle.
Donnons-nous une fonction f de la forme :

$$f = R(\cos, \sin),$$

où $R(X, Y) \in \mathbb{R}(X, Y)$ est une fraction rationnelle en deux variables (au numérateur et au dénominateur on a une somme finie de termes de la forme $c_{i,j}\ X^i\ Y^j$.)
Utilisons le changement de variable $u = \tan \frac{t}{2}$. On suit la méthode du changement de variable :

- $u = \tan \frac{t}{2}$, donc $t = 2 \arctan u$ (à condition que t varie entre $-\pi$ et π strictement) ;
- par les formules d'arc moitié,

$$\cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2} \text{ et } \sin t = \frac{2u}{1+u^2};$$

- $dt = \frac{2}{1+u^2}\ du$
- les bornes changent mais on regarde déjà la nouvelle intégrande
- la nouvelle intégrande est :

$$f(t) = R(\cos(t), \sin(t)) = R\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}, \frac{2u}{1+u^2}\right)$$

qui est une fraction rationnelle en la variable u que l'on pose $G(u)$ par exemple avec $G(X) \in \mathbb{R}(X)$

- La nouvelle intégrale est de la forme :

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2} G(u)\,\frac{2}{u^2+1}\,du.$$

On obtient bien l'intégrale d'une fraction rationnelle en la variable u.

Passons aux calculs pratiques avec l'exemple 10.
La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\cos(2x)}{\sin(3x)+2}$ est bien une fraction rationnelle en $\cos(x)$ et $\sin(x)$ en exprimant $\cos(px)$ et $\sin(qx)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ (utiliser au besoin des exponentielles complexes). On s'en moque d'avoir l'expression de la fraction rationnelle. On peut appliquer la méthode, c'est tout ce qui nous importe.
Après avoir testé les trois changements de variable, rien ne marche. On pose $u = \tan\dfrac{x}{2}$. Les calculs sont assez lourds en terme de calculs pratique. On ne les fait pas.
Juste un détail : comme x varie de 0 à π, alors la nouvelle variable u variera de 0 vers $+\infty$ (on dépasse le programme de MPSI pour utiliser plutôt le programme de deuxième année...).
En tout cas, si l'on veut faire les calculs complets, on peut remplir une bonne page avec des calculs lourds.
Pour la deuxième intégrale plus digeste, les trois premiers tests ne marchent pas pour $f(t)\,dt$.
On pose $u = \tan\dfrac{t}{2}$, de sorte que la nouvelle intégrale est :

$$\begin{aligned} I = \int_0^{\pi/4} \frac{dt}{1+\cos t} &= \int_0^{\tan\frac{\pi}{8}} \frac{\frac{2}{1+u^2}}{1+\frac{1-u^2}{1+u^2}}\,du \\ &= \int_0^{\tan\frac{\pi}{8}} du = \tan\frac{\pi}{8} \\ &= \sqrt{2}-1, \end{aligned}$$

en posant $\alpha = \tan\dfrac{\pi}{8}$ et en utilisant $1 = \tan\left(2\,\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{2\alpha}{1-\alpha^2}$. On résout une équation polynomiale de degré 2 avec $\alpha > 0$:

$$I = \sqrt{2}-1.$$

Pour la troisième intégrale du premier point, l'invariance $t \longleftarrow +\pi$ est satisfaite et on pose $u = \tan t$.
On obtient comme nouvelle intégrale, sachant que $\tan\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et que $\dfrac{1}{\cos^2} = 1+\tan^2$, donc $\sin^2 t = 1-\cos^2 t = 1 - \dfrac{1}{1+u^2} = \dfrac{u^2}{1+u^2}$:

$$J = \int_0^{\pi/6} \frac{dt}{1+\sin^2 t} = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{du}{1+2u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \Big[\arctan v\Big]_0^{\sqrt{2/3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \arctan\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

Pour le deuxième point, on va par exemple calculer une primitive de $\dfrac{1}{\sin}$ et de $\dfrac{1}{\cos}$ sur l'intervalle $I = \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
On va calculer les primitives de ces deux fonctions, primitives s'annulant en $\dfrac{\pi}{4}$ par exemple.
On calcule donc :

$$F(x) = \int_{\pi/4}^{x} \frac{dt}{\sin t} \text{ et } G(x) = \int_{\pi/4}^{x} \frac{dt}{\cos t}.$$

Pour $F(x)$, on pose $u = \cos t$ ce qui donne en utilisant les formules connues pour arccos (dérivée et $\sin \circ \arccos$) :

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\cos x} \frac{-du}{\sqrt{1-u^2}} \times \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \\
&= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\cos x} \frac{du}{u^2-1} \\
&= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\cos x} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)\, du \\
&= \left[\frac{1}{2}\ \ln\left(\frac{1-u}{1+u}\right)\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\cos x}.
\end{aligned}$$

Une primitive est (en laissant tomber la constante d'intégration) :

$$x \longmapsto \frac{1}{2} \ln \frac{1-\cos x}{1+\cos x}.$$

Pour la quantité $G(x)$, c'est l'invariance $t \longleftarrow \pi - t$ qui marche. On pose $u = \sin t$ ce qui donne :

$$\begin{aligned}
G(x) &= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sin x} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \times \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \\
&= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sin x} \frac{du}{1-u^2} \\
&= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sin x} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u-1}\right)\, du \\
&= \left[\frac{1}{2}\ \ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right)\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sin x}.
\end{aligned}$$

Une primitive est (en laissant tomber la constante d'intégration) :

$$x \longmapsto \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin x}{1-\sin x}.$$

Pour le troisième point, la réponse est oui car l'intégrande est une fraction rationnelle en cos et en sin (fraction rationnelle compliquée). Je vous déconseille de vous lancer dans les calculs de l'intégrale...

La formule de Taylor avec reste intégral

On termine par la formule de Taylor avec reste intégral. On reconnaît la première somme comme d'habitude dans les formules de Taylor (Taylor-Lagrange ou Taylor-Young) et la partie intégrale. Le plus simple est d'apprendre par cœur le reste intégral pour ne pas se mélanger les pinceaux entre le $n+1$ dans $f^{(n+1)}$ et le n dans $n!$ ou $(b-t)^n$. Pour retrouver la bonne formule, on peut tester pour $n=0$ par exemple ce qui débloque pas mal de situation où on a perdu la formule de vue.

La démonstration se fait par récurrence sur n à l'aide d'intégrations par parties successives. Voici ce que cela donne dans les grandes lignes :

- Si $n=0$, la formule devient :
$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)\ dt,$$
qui est vraie.
- Supposons la formule vraie pour toute fonction f de classe C^{n+1} sur $[a,b]$.
- Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+2} sur $[a,b]$. Alors f est C^{n+1} et on applique la formule de l'hypothèse de récurrence. On peut donc écrire la formule de la proposition 6 telle qu'elle apparaît.
Ensuite, on fait une IPP sur l'intégrale, en dérivant $f^{(n+1)}$ et en intégrant l'autre terme, ce qui donne :
$$\begin{aligned}\int_a^b f^{(n+1)}(t)\ \frac{(b-t)^n}{n!}\ dt &= \left[-f^{(n+1)}(t)\ \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_a^b + \int_a^b f^{(n+2)}(t)\ \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}\ dt \\ &= \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}\cdot(b-a)^{n+1} + \int_a^b f^{(n+2)}(t)\ \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}\ dt.\end{aligned}$$
On voit alors que tout se passe bien avec un terme qui se rajoute dans la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cdots$ pour donner $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}\cdots$ et l'intégrale qui est celle que l'on devait obtenir au rang suivant.

Pour l'exemple 11, on peut appliquer la formule de Taylor-reste intégral pour la fonction $f=\exp$ de classe C^∞ sur $[a,b]=[0,1]$ pour tout entier n. On obtient :
$$e = \exp(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!}\ (1-0)^k + \int_0^1 \exp^{(n+1)}(t)\ \frac{(1-t)^n}{n!}\ dt.$$
On simplifie le tout selon :
$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \int_0^1 e^t\ \frac{(1-t)^n}{n!}\ dt.$$
Il suffit alors de montrer que la quantité :
$$u_n = \int_0^1 e^t\ \frac{(1-t)^n}{n!}\ dt,$$

tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, ce qui ne pose pas de problème car :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant |u_n| = \left|\int_0^1 e^t \, \frac{(1-t)^n}{n!} \, dt\right| & \leqslant \int_0^1 \left|e^t \, \frac{(1-t)^n}{n!}\right| \, dt \text{ [en fait = car tout est positif]} \\ & \leqslant \int_0^1 e \, \frac{1}{n!} \, dt \\ & \leqslant \frac{e}{n!} = \circ(1). \end{aligned}$$