

# Chapitre : l'équation de d'Alembert



## Table des matières

<b>1</b>	<b>Premières approches</b>	<b>2</b>
1.1	Oscillateurs harmoniques couplés et propagation longitudinale en dimension un . . . . .	2
1.1.1	Équation discrète des mouvements . . . . .	2
1.1.2	Équation continue des mouvements . . . . .	2
1.2	Propagation transversale d'une onde le long d'une corde . . . . .	3
1.3	Propagation d'une onde dans un milieu fluide . . . . .	4
1.3.1	Notion de dérivée particulière . . . . .	4
1.3.2	Modélisation de la propagation d'onde . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Résolution de l'équation de d'Alembert</b>	<b>7</b>
2.1	En coordonnées cartésiennes et en dimension 1 . . . . .	7
2.1.1	Résolution proprement dite . . . . .	7
2.1.2	Cas des ondes stationnaires . . . . .	8
2.1.3	Interprétation physique des solutions . . . . .	9
2.1.4	Corde de Melde . . . . .	9
2.2	En coordonnées polaires et en dimension 2 . . . . .	11
2.2.1	Gradient en coordonnées polaires . . . . .	11
2.2.2	Signification du gradient . . . . .	12
2.3	Divergence en coordonnées polaires . . . . .	12
2.3.1	Signification de la divergence . . . . .	12
2.3.2	Retour sur la formule de la divergence en polaires . . . . .	13
2.4	Laplacien en coordonnées polaires . . . . .	13
2.5	Exemple de résolution en polaires . . . . .	14

# 1 Premières approches

## 1.1 Oscillateurs harmoniques couplés et propagation longitudinale en dimension un

### 1.1.1 Équation discrète des mouvements

On considère une chaîne constituée d'une infinité de masses ponctuelles  $m$ , disposées en ligne, les masses étant – à l'équilibre – distantes d'une distance fixe  $d > 0$ .

On numérote les masses selon un entier relatif  $n \in \mathbb{Z}$  et on se place dans le cas où la masse  $m_n$  interagit uniquement avec ses deux masses voisines  $m_{n-1}$  et  $m_{n+1}$  par une force de rappel de type « ressort », avec une constante de raideur égale à  $k > 0$ .

À l'équilibre, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , la masse  $m_n$  occupe la position  $x_n = nd$  sur l'axe des réels.

Soit  $n$  dans  $\mathbb{Z}$ . La masse  $m_n$  est susceptible de se déplacer légèrement autour de sa position d'équilibre, en fonction du temps. On note alors la position

$$x_n : t \mapsto nd + u_n(t),$$

de la masse  $m_n$  au cours du temps. La fonction  $u_n : t \mapsto u_n(t)$  indique l'écart entre la position de la masse  $m_n$  à l'instant  $t$  et sa position d'équilibre.

La masse  $m_n$  est soumise uniquement aux deux forces de rappel exercées par les deux masses voisines  $m_{n-1}$  et  $m_{n+1}$ , les poids étant négligés.

Par le principe fondamental de la dynamique, on peut donc écrire en « projection » sur l'axe des réels pour le système constitué de la masse  $m_n$  :

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{x}_n &= -k(x_n - x_{n-1} - d) + k(x_{n+1} - x_n - d) \\ &= -k(u_n - u_{n-1}) + k(u_{n+1} - u_n) \\ &= k(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}). \end{aligned}$$

Or,  $\ddot{x}_n = \ddot{u}_n$ . L'équation devient :

$$\ddot{u}_n = \frac{k}{m} \cdot (u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}).$$

### 1.1.2 Équation continue des mouvements

La distance  $d > 0$  séparant à l'équilibre les masses ponctuelles est petite par rapport à la longueur d'onde de la propagation du signal. Par exemple, si l'on veut étudier la propagation d'une onde sonore dans un métal longiligne, les masses ponctuelles sont les atomes séparés par une distance inter-atome de l'ordre de  $d \simeq 10^{-10}$  m.

La propagation des ondes sonores dans ce milieu est de distance caractéristique bien supérieure à la quantité  $d$ . En effet, les ondes sonores ont une fréquence  $\nu$  variant de 20 Hz à 20 kHz. La longueur d'onde associée vaut  $\lambda = \frac{c}{\nu}$ , avec  $c$  la célérité de l'onde sonore dans le milieu. Dans l'acier par exemple, la célérité de l'onde est égale à environ  $c \simeq 5600$  m · s<sup>-1</sup>. On en déduit une longueur d'onde  $\lambda$  comprise entre 0.28 m et 280 m, valeurs bien supérieures à la longueur  $d$ .

On peut donc considérer dans la suite la distance  $d$  comme « petite ».

On interprète pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  et pour tout instant  $t$ , la quantité  $u_n(t)$  comme l'évaluation d'une fonction  $u : \mathbb{R} \times [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  en le couple  $(x_n(t), t)$ .

On peut utiliser des formules de Taylor-Young à l'ordre deux pour la fonction  $u(\cdot, \cdot)$  entre les couples  $(x_{n+1}(t), t)$  et  $(x_n(t), t)$ , ce qui donne en notant  $x_i$  pour  $x_i(t)$  et  $u_i$  pour  $u_i(t)$  :

$$\begin{aligned} u(x_{n+1}, t) &= u(x_n + d + u_{n+1} - u_n, t) \\ &= u(x_n, t) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_n, t) \cdot (d + u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_n, t) \cdot (d + u_{n+1} - u_n)^2 + o((d + u_{n+1} - u_n)^2) \\ &\simeq u(x_n, t) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_n, t) \cdot d + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_n, t) \cdot d^2. \end{aligned}$$

On en déduit au rang inférieur :

$$\begin{aligned} u(x_{n-1}, t) &= u(x_n - d - u_n + u_{n-1}, t) \\ &= u(x_n, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_n, t) \cdot (d + u_n - u_{n-1}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_n, t) \cdot (d + u_n - u_{n-1})^2 + o((d + u_n - u_{n-1})^2) \\ &\simeq u(x_n, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_n, t) \cdot d + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_n, t) \cdot d^2. \end{aligned}$$

On en déduit que l'égalité discrète

$$\ddot{u}_n = \frac{k}{m} \cdot (u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}).$$

devient

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{k}{m} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot d^2 \\ &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \end{aligned}$$

en posant  $c = d\sqrt{\frac{k}{m}}$  donnant la célérité de propagation de l'onde dans le milieu.

## 1.2 Propagation transversale d'une onde le long d'une corde

On considère une corde inextensible, de masse linéique  $\mu$  [masse par unité de longueur], tendue horizontalement avec une force de maintien  $\vec{F}$ . Les forces de maintien rendent négligeable le poids de la corde. À l'équilibre, la corde est horizontale rectiligne.

On étudie les mouvements de la corde au voisinage de cette position d'équilibre, en imprimant un mouvement transversal sur l'une des extrémités. On étudie la propagation de cette perturbation le long de la corde.

On considère donc le système constitué d'un morceau de corde de longueur infinitésimal, entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$ . On note  $\alpha = \alpha(x, t)$ , l'angle formé par cet élément de corde par rapport à l'axe des abscisses à l'instant  $t$ , l'axe des abscisses indiquant la position d'équilibre initial de la corde. On suppose que l'angle  $\alpha$  est toujours proche de 0. Cet élément de corde est soumis à trois forces : deux forces de tension à ses extrémités et le poids négligé. Sur l'extrémité gauche, en l'abscisse  $x$ , on a une force de tension  $-\vec{T}(x, t)$  et sur l'extrémité droite, en l'abscisse  $x + dx$ , on a une force de tension  $\vec{T}(x + dx, t)$ .

L'élément de corde est de longueur  $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + \tan^2 \alpha dx^2} \simeq dx$ , donc cet élément de corde a pour masse  $\mu dx$ .

On suppose que l'élément de corde ne bouge que transversalement, selon l'axe des ordonnées : l'accélération est donc transverse.

On obtient la relation vectorielle :

$$\mu dx \vec{a} = -\vec{T}(x, t) + \vec{T}(x + dx, t),$$

En « projetant » longitudinalement – ou plutôt en appliquant  $\vec{e}_1^* = \langle \vec{e}_1 | \cdot \rangle$  sur l'axe longitudinal, on obtient :

$$0 = -T(x, t) \cos \alpha(x, t) + T(x + dx, t) \cos \alpha(x + dx, t).$$

En « projetant » transversalement – ou plutôt en appliquant  $\vec{e}_2^* = \langle \vec{e}_2 | \cdot \rangle$  sur l'axe transversal, on obtient :

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -T(x, t) \sin \alpha(x, t) + T(x + dx, t) \sin \alpha(x + dx, t).$$

La première équation donne en ne retenant que l'ordre 1 – donc  $\cos \alpha \simeq 1$  :

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x, t) = 0$$

donc la fonction  $T$  est constante en  $x$ . La force de maintien aux extrémités de la corde reste constante : pour toute abscisse  $x$  et tout instant  $t$ ,  $T(x, t) = F$ , norme de la force de maintien.

La deuxième équation devient en utilisant toujours à l'ordre 1,  $\sin \alpha \simeq \alpha$  :

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial T \times \sin \alpha}{\partial x} dx \simeq \frac{\partial T \times \alpha}{\partial x} dx = F \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx.$$

Or, on a  $\tan \alpha \simeq \frac{\partial y}{\partial x} \simeq \alpha$ , donc :

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \simeq F \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

En posant  $c = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$  donnant la célérité de propagation de l'onde transversale, on obtient :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

## 1.3 Propagation d'une onde dans un milieu fluide

### 1.3.1 Notion de dérivée particulière

On considère une particule évoluant dans l'espace  $\mathbb{R}^3$  de façon dérivable.

On note  $\gamma : t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , sa trajectoire au cours du temps, ou plutôt l'arc paramétré associé, les fonctions  $x(\cdot)$ ,  $y(\cdot)$  et  $z(\cdot)$  étant des fonctions dérivables en la variable temporelle  $t$ .

On considère une grandeur physique  $F : \mathbb{R}^3 \times [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^n$  scalaire ou vectorielle liée à la particule considérée. Cette fonction  $F$  est appelée **champ scalaire ou vectoriel**, selon la nature de la grandeur physique étudiée. On suppose que le champ  $F$  est différentiable – chaque composante  $\vec{e}_i \circ F : \mathbb{R}^3 \times [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  étant une fonction différentiable, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , la base  $(e_1, \dots, e_n)$  étant par exemple la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

On appelle **dérivée particulière** de la grandeur  $F$ , la fonction :

$$t \mapsto \frac{DF}{Dt}(t) = \left( t \mapsto F(\gamma(t), t) \right)'(t).$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0, \quad \frac{DF}{Dt} &= \frac{\partial F}{\partial t}(\gamma(t), t) + x'(t) \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(\gamma(t), t) + y'(t) \cdot \frac{\partial F}{\partial y}(\gamma(t), t) + z'(t) \cdot \frac{\partial F}{\partial z}(\gamma(t), t) \\ &= \frac{\partial F}{\partial t}(\gamma(t), t) + \langle \vec{v} \mid \vec{\nabla} \rangle (F)(\gamma(t), t). \end{aligned}$$

### 1.3.2 Modélisation de la propagation d'onde

On considère un plan d'eau, pour l'instant immobile, la hauteur d'eau étant constante égale à  $H$  mesurée en mètres. À l'instant  $t = 0$ , on perturbe la surface de l'eau, le volume global de l'eau n'étant pas modifié.

Pour étudier la propagation de la perturbation à la surface de l'eau, on adopte la modélisation suivante.

On se place dans le cas où la perturbation est petite par rapport à la hauteur  $H$  initiale du plan d'eau.

Dans la suite, on repère le bassin par un repère orthonormé direct  $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  et pour tout  $x$  et  $y$  et pour tout instant  $t$ , on note

$$h(x, y, t) = H + \zeta(x, y, t),$$

la hauteur d'eau à la verticale du point  $(x, y)$ . On se place dans la situation où la quantité  $\zeta(x, y, t)$  est petite par rapport à la hauteur  $H$ .

On considère que la quantité  $\frac{\partial v_z}{\partial t}$  est petite devant l'intensité  $g$  de pesanteur par exemple.

On suppose que la masse volumique du fluide considéré est constante, égale à  $\mu$ .

On considère le système formé par le fluide présent dans un volume élémentaire  $d\tau$  constitué du pavé élémentaire

$$[x, x + dx] \times [y, y + dy] \times [z, z + dz].$$

Les deux forces qui s'appliquent à notre élément de volume sont le poids de cet élément de volume fluide, dans le champ de pesanteur  $\vec{g}$  supposé constant ainsi que les forces de pression sur les parois du volume. Plus précisément, en notant  $P(x, y, z, t)$  la pression exercée au point de coordonnées  $(x, y, z)$  à l'instant  $t$ , les forces de pression qui s'appliquent sur les six faces de notre élément de volume sont :

- pour la face inférieure :

$$P(x, y, z, t) \cdot dx \, dy \cdot \vec{e}_3$$

- pour la face supérieure :

$$-P(x, y, z + dz, t) \cdot dx \, dy \cdot \vec{e}_3$$

- pour la face latérale gauche :

$$P(x, y, z, t) \cdot dy \, dz \cdot \vec{e}_1$$

- pour la face latérale droite :

$$-P(x + dx, y, z, t) \cdot dy \, dz \cdot \vec{e}_1$$

- pour la face verticale avant

$$P(x, y, z, t) \cdot dx \, dz \cdot \vec{e}_2$$

- pour la face verticale arrière :

$$-P(x, y + dy, z, t) \cdot dx \, dz \cdot \vec{e}_2.$$

La somme des forces de pression vaut donc :

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= -\frac{\partial P}{\partial x} d\tau \cdot \vec{e}_1 - \frac{\partial P}{\partial y} d\tau \cdot \vec{e}_2 - \frac{\partial P}{\partial z} d\tau \cdot \vec{e}_3 \\ &= -d\tau \cdot \overrightarrow{\text{grad}} P. \end{aligned}$$

La masse du volume de fluide élémentaire vaut  $\mu d\tau$ . Le poids vaut donc  $\mu d\tau \cdot \vec{g}$ .

Dans cette situation, la dérivée particulière  $\frac{D\vec{v}}{Dt}$  vaut à l'ordre 1 seulement la dérivée partielle  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ . En effet, les autres termes sont de la forme :

$$\varphi_i(t) \cdot \partial_i v(x(t), y(t), t),$$

avec pour  $i = 1$ , la fonction  $\varphi_i = x'$  et pour  $i = 2$ , la fonction  $\varphi_i = y'$ . On a donc une somme de termes qui sont produits de termes d'ordre 1 : ce sont des termes d'ordre 2 négligeables par rapport à  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ .

On applique le principe fondamental de la dynamique à ce système en ne retenant que les termes d'ordre 1, ce qui donne :

$$\mu d\tau \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -d\tau \cdot \overrightarrow{\text{grad}} P + \mu d\tau \cdot \vec{g},$$

ou encore :

$$\mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} P + \mu \cdot \vec{g},$$

En « projetant sur les trois axes de coordonnées » – ou plutôt en effectuant une petite dualité ..., on obtient les trois formules suivantes :

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial v_x}{\partial t} &= -\frac{\partial P}{\partial x} \\ \mu \frac{\partial v_y}{\partial t} &= -\frac{\partial P}{\partial y} \\ \mu \frac{\partial v_z}{\partial t} &= -\frac{\partial P}{\partial z} - \mu g. \end{aligned}$$

Par hypothèse sur la quantité  $\frac{\partial v_z}{\partial t}$  négligeable devant l'intensité de pesanteur  $g$ , on en déduit :

$$\frac{\partial P}{\partial z} \simeq -\mu g.$$

On intègre cette dernière formule par rapport à la variable  $z$ , les variables  $x$  et  $y$  étant fixées. On obtient alors une formule de la forme :

$$P(x, y, z, t) = -\mu g z + C(x, y, t),$$

la quantité  $C(x, y, t)$  correspondant à une constante d'intégration indépendante de la variable  $z$  mais pouvant éventuellement dépendre des autres variables.

On écrit maintenant la pression au niveau de la surface libre, au point de coordonnées  $(x, y, h(x, y, t))$ . En notant  $P_0$ , la pression atmosphérique est supposée constante localement en ce point et la quantité  $h(x, y, t)$  ne varie pas beaucoup [hypothèse de départ]. On en déduit par continuité de la pression dans l'espace :

$$P(x, y, h(x, y, t)) = P_0,$$

imposant

$$C(x, y, t) = P_0 + \mu g h(x, y, t).$$

On en déduit l'expression de la pression en tout point du fluide :

$$P(x, y, z, t) = P_0 + \mu g (H + \zeta(x, y, t) - z) \quad \text{[ équation ★ ]}$$

On prend maintenant le gradient dans la forme ★, ce qui donne :

$$\overrightarrow{\text{grad}} P = \mu g \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \zeta - \mu g \cdot \vec{e}_3.$$

L'équation ★ se réécrit donc d'après l'équation du mouvement du volume de fluide infinitésimal et comme  $\vec{g} = -g \cdot \vec{e}_3$  :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -g \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \zeta.$$

On s'intéresse maintenant aux équations liées à la conservation de matière.

On considère à l'instant  $t$ , le fluide présent dans la tranche verticale  $[x, x + dx] \times [y, y + dy]$ . La hauteur de cette tranche à l'instant  $t$  vaut  $h(x, y, t)$ .

À l'instant  $t$ , la masse de fluide de ce système vaut donc :

$$\delta m(t) = \mu h(x, y, t) dx dy.$$

La variation temporelle de masse entre les instants  $t$  et  $t + dt$  vaut donc :

$$\begin{aligned} d(\delta m) &= \delta m(t + dt) - \delta m(t) \\ &= \mu \left( h(x, y, t + dt) - h(x, y, t) \right) dx dy \\ &= \mu \frac{\partial \zeta}{\partial t} dx dy dt \quad [ \text{équation (1)} ] \end{aligned}$$

Entre les instants  $t$  et  $t + dt$ , le bilan de masse peut aussi se calculer par le débit massique à travers les quatre faces de ce volume. On note le vecteur vitesse :

$$\vec{v}(x, y, t) = \left( v_x(x, y, t), v_y(x, y, t) \right).$$

On en déduit donc le calcul de flux suivant :

$$\begin{aligned} d(\delta m) &= \\ &\mu v_x(x, y, t) dt dy h(x, y, t) - \mu v_x(x + dx, y, t) dt dy h(x + dx, y, t) + \mu v_y(x, y, t) dt dx h(x, y, t) - \mu v_y(x, y + dy, t) dt dx h(x, y + dy, t) \\ &\quad - \mu \left( \frac{\partial(h \cdot v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(h \cdot v_y)}{\partial y} \right) dx dy dt = \\ &\quad - \mu dx dy dt \operatorname{div} \left( h \cdot \vec{v} \right). \end{aligned}$$

Or, en se limitant aux termes prépondérants en  $dx dy$  seulement, sachant que la fonction  $h$  est égale à  $h = H + \zeta$ , avec  $\zeta$  petit devant  $H$ , on obtient :

$$d(\delta m) \simeq -\mu dx dy dt \operatorname{div} \left( H \cdot \vec{v} \right) = -\mu dx dy dt H \operatorname{div} (\vec{v}) \quad [ \text{équation (2)} ]$$

En regroupant les deux équations, on obtient donc :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -H \operatorname{div} (\vec{v}).$$

On dispose donc de deux équations liées à la dynamique des fluides :

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -g \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \zeta & (L_1) \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} = -H \operatorname{div} (\vec{v}) & (L_2) \end{cases}.$$

On applique l'opérateur  $\frac{\partial}{\partial t}$  dans la seconde ligne ( $L_2$ ), ce qui donne :

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} &= -H \frac{\partial \operatorname{div} (\vec{v})}{\partial t} \\ &= -H \operatorname{div} \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right), \text{ par le théorème de Schwarz sur } v \text{ de classe } C^2 \\ &= -H \operatorname{div} \left( -g \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} (\zeta) \right) \text{ par la ligne } (L_1) \\ &= Hg \operatorname{div} \left( \overrightarrow{\operatorname{grad}} (\zeta) \right) \\ &= Hg \Delta(\zeta), \end{aligned}$$

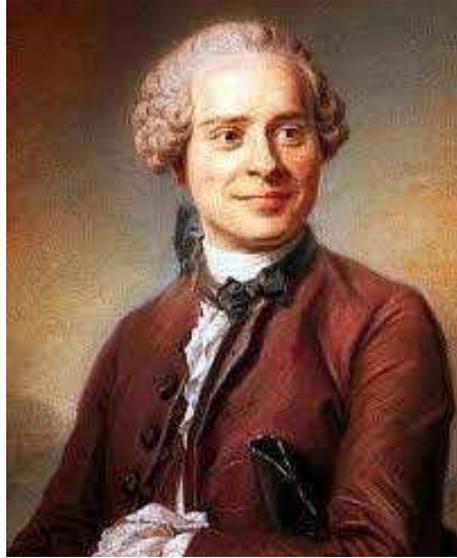
où la lettre  $\Delta$  désigne l'opérateur laplacien.

On aboutit donc à l'équation vérifiée par la hauteur  $\zeta$ , équation qui est la même que celle vérifiée par la hauteur  $h$  de fluide, car  $\zeta = h - H$ , avec  $H$  constante.

En conclusion, on obtient l'équation de d'Alembert pour la hauteur de fluide :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = c^2 \Delta h,$$

avec  $c = \sqrt{Hg}$  correspondant à la célérité de l'onde de gravité se propageant à la surface libre du fluide. Cette équation a été établie en 1746, en dimension une, par le français Jean le Rond d'Alembert.



## 2 Résolution de l'équation de d'Alembert

### 2.1 En coordonnées cartésiennes et en dimension 1

#### 2.1.1 Résolution proprement dite

On considère l'équation :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

où  $c > 0$  est une constante, l'inconnue étant une fonction  $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) & \longrightarrow f(x, t) \end{cases}$  de classe  $C^2$ .

On procède par analyse/synthèse.

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction solution de l'équation. On considère le changement de variable  $C^2$ -difféomorphe :

$$\begin{cases} u = x - ct \\ v = x + ct \end{cases}.$$

On pose la nouvelle fonction :

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) & \longmapsto f(x, t) = f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2t}\right) \end{cases}.$$

La fonction  $g$  est encore de classe  $C^2$ .

Par la règle de la chaîne, on peut déjà écrire :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = -c \frac{\partial g}{\partial u} + c \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} \end{cases}.$$

En réitérant la règle de la chaîne dans ces deux lignes, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial g}{\partial u} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial g}{\partial u} \right) \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} \right) \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

ce qui donne finalement en utilisant le théorème de Schwarz :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \end{cases}$$

En réinjectant dans l'équation vérifiée par la fonction  $f$ , on obtient la nouvelle équation simplifiée vérifiée par la fonction  $g$  :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0.$$

En intégrant par rapport à la variable  $v$  par exemple, on obtient :

$$\frac{\partial g}{\partial v} = \varphi(u),$$

la quantité  $\varphi(u)$  provenant d'une constante d'intégration indépendante de la variable  $v$ .

Comme la fonction  $g$  est de classe  $C^2$ , la fonction  $\frac{\partial g}{\partial v}$  est donc de classe  $C^1$  et la fonction  $\varphi$  est une fonction de classe  $C^1$  en la variable  $u$ .

En intégrant l'égalité  $\frac{\partial g}{\partial v} = \varphi(u)$  par rapport à la variable  $u$ , en notant  $\Phi$  une primitive de la fonction  $\varphi$ , alors on obtient une égalité de la forme :

$$g(u, v) = \Phi(u) + \Psi(v),$$

la quantité  $\Psi(v)$  provenant d'une constante d'intégration indépendante de la variable  $u$ .

En fin d'analyse, la fonction  $g$  est donc de la forme :

$$g : (u, v) \longmapsto \Phi(u) + \Psi(v),$$

les fonctions  $\Phi$  et  $\Psi$  étant de classe  $C^2$ , car  $g$  l'est.

On en déduit que la fonction  $f$  est de la forme :

$$f : (x, y) \longmapsto \Phi(x - ct) + \Psi(x + ct).$$

En synthèse, on vérifie que ces fonctions conviennent. En effet, si  $f$  est une fonction de cette forme, alors :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -c\Phi'(x - ct) + c\Psi'(x + ct) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial x} = \Phi'(x - ct) + \Psi'(x + ct).$$

En dérivant une nouvelle fois, on obtient :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2\Phi''(x - ct) + c^2\Psi''(x + ct) \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \Phi''(x - ct) + \Psi''(x + ct).$$

Il est alors clair que la fonction  $f$  vérifie l'équation du début.

### 2.1.2 Cas des ondes stationnaires

Une onde stationnaire correspond à une solution  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  de l'équation de d'Alembert où les variables spatiales et temporelles sont découplées. Les solutions stationnaires sont donc les solutions de la forme :

$$f : (x, t) \longmapsto A(x) \cdot B(t),$$

où  $A(\cdot)$  et  $B(\cdot)$  sont deux fonctions de classe  $C^2$  d'une seule variable.

En réinjectant dans l'équation, on obtient pour tous  $(x, t)$  :

$$A(x) \cdot B''(t) = c^2 A''(x) \cdot B(t).$$

On s'intéresse à une solution stationnaire non nulle. Il existe donc un couple  $(x_0, t_0)$  tel que  $f(x_0, t_0)$  est non nul :

$$A(x_0) \neq 0 \text{ et } B(t_0) \neq 0.$$

On en déduit que pour tout couple  $(x, t)$ , on a :

$$\begin{cases} A(x) \cdot B''(t_0) = c^2 A''(x) \cdot B(t_0) \\ A(x_0) \cdot B''(t) = c^2 A''(x_0) \cdot B(t) \end{cases} .$$

En posant

$$\lambda = \frac{B''(t_0)}{B(t_0)} = c^2 \frac{A''(x_0)}{A(x_0)},$$

on en déduit les équations différentielles vérifiées par les fonctions  $A(\cdot)$  et  $B(\cdot)$  :

$$\begin{cases} A''(x) = \frac{1}{c^2} \lambda A(x) \\ B''(t) = \lambda B(t) \end{cases} .$$

Les solutions dépendent du signe de la quantité  $\lambda$ .

Physiquement, la quantité  $|A(x) \cdot B(t)|$  est bornée au cours du temps, imposant au nombre  $\lambda$  d'être strictement négatif. En posant :

$$\omega = \sqrt{-\lambda} \text{ et } k = \frac{\omega}{c}$$

les équations deviennent :

$$\begin{cases} A''(x) + k^2 A(x) = 0 \\ B''(t) + \omega^2 B(t) = 0 \end{cases} .$$

Les solutions à valeurs complexes sont de la forme :

$$A : x \mapsto A_0 \exp(i(kx - \alpha)) \text{ et } B : t \mapsto B_0 \exp(i(\omega t - \beta)).$$

Les solutions stationnaires à valeurs complexes sont donc des fonctions qui sont la somme de deux signaux :

$$f : (x, t) \mapsto f_0 \exp(i(kx - \omega t + \varphi))$$

correspondant à une onde d'amplitude  $|f_0|$ , de pulsation temporelle  $\omega$  et de vecteur d'onde  $k$ , la quantité  $\varphi$  étant le déphasage. La longueur d'onde de l'onde associée est donnée par la formule :

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}.$$

### 2.1.3 Interprétation physique des solutions

Les solutions précédentes :

$$f : (x, y) \mapsto \Phi(x - ct) + \Psi(x + ct)$$

peuvent être considérées comme la superposition de deux ondes progressives  $(x, t) \mapsto \Phi(x - ct)$  et  $(x, t) \mapsto \Psi(x + ct)$  dans le sens de propagation des abscisses  $x$  respectivement croissantes et décroissantes.

### 2.1.4 Corde de Melde

On considère une corde de masse linéique constante  $\mu$  maintenue horizontalement de long d'un axe des abscisses. En l'extrémité gauche  $x = 0$ , la corde est soumise à un déplacement harmonique vertical de la forme :

$$y : (0, t) \mapsto a \cos(\omega t),$$

où la pulsation  $\omega > 0$  est réglable à travers la fréquence  $\nu$  d'une lame vibrante – on rappelle que  $\omega = 2\pi\nu$  – et l'amplitude des oscillations  $a > 0$  est petite par rapport à la longueur  $L$ .

En l'extrémité droite à l'abscisse  $x = L$ , la corde est fixée tendue à l'aide d'une masse via une poulie. La force de maintien est d'intensité  $F$  constante.

On s'intéresse au régime forcé, obtenu après disparition du régime transitoire.

On pose  $y : (x, t) \mapsto y(x, t)$ , la fonction donnant à l'instant  $t$  et en l'abscisse  $x \in [0, L]$ , l'ordonnée  $y(x, t)$  de la corde vibrante.

Comme vu dans le paragraphe précédent, on sait que la fonction  $y$  de classe  $C^2$  vérifie l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

où la célérité de l'onde est donnée par  $c = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ .

On considère que l'onde transversale observée sur la corde est une onde stationnaire, permettant de découpler les variables spatiale  $x$  et temporelle  $t$ .

La résolution classique de cette équation donne une solution sous la forme :

$$y : (x, t) \mapsto A \cos(kx - \psi) \cdot \cos(\Omega t - \varphi),$$

où  $k = \frac{\omega}{c}$  est le vecteur d'onde et  $\Omega \geq 0$  est la pulsation du mouvement.

Les conditions aux limites imposent :

- en l'abscisse  $x = 0$  :

$$\forall t > 0, y(0, t) = a \cos(\omega t) = A \cos(\psi) \cos(\Omega t - \varphi).$$

Si  $\Omega = 0$ , la fonction  $t \mapsto A \cos(\psi) \cos(\Omega t - \varphi)$  est constante alors que la fonction  $t \mapsto a \cos(\omega t)$  ne l'est pas.

Ainsi, la pulsation  $\Omega$  est non nulle.

Si  $\Omega \neq \omega$ , la famille  $\mathcal{L} = \left( u : t \mapsto \cos(\omega t), v : t \mapsto \cos(\Omega t), w : t \mapsto \sin(\Omega t) \right)$  est libre car si  $\alpha \cdot u + \beta \cdot v + \gamma \cdot w = 0$  est une combinaison linéaire nulle entre les vecteurs de la famille  $\mathcal{L}$ , alors :

$$\forall t > 0, \alpha \cos(\omega t) + \beta \cos(\Omega t) + \gamma \sin(\Omega t) = 0.$$

On dérive deux fois cette équation, ce qui donne :

$$\forall t > 0, -\alpha\omega^2 \cos(\omega t) - \beta\Omega^2 \cos(\Omega t) - \gamma\Omega^2 \sin(\Omega t) = 0.$$

En combinant la première égalité ( $L_1$ ) avec cette dernière ( $L_2$ ) via l'opération  $(\Omega^2 \cdot L_1 + L_2)$ , on obtient :

$$\forall t > 0, \alpha(\Omega^2 - \omega^2) \cos(\omega t) = 0.$$

Comme  $\omega \neq \Omega$  et que ces deux pulsations sont positives, alors  $\Omega^2 - \omega^2 \neq 0$ , imposant  $\alpha = 0$ .

Les vecteurs  $v$  et  $w$  ne sont clairement pas colinéaires. La combinaison linéaire  $\beta \cdot v + \gamma \cdot w = 0$  impose alors  $\beta = \gamma = 0$  et la famille  $\mathcal{L}$  est bien libre.

La condition en l'abscisse  $x = 0$  impose :

$$\forall t > 0, a \cos(\omega t) = A \cos(\psi) \cos(\Omega t - \varphi) = A \cos \psi \cos(\varphi) \cdot \cos(\Omega t) + A \cos \psi \sin(\varphi) \cdot \sin(\Omega t)$$

puis bientôt :

$$\Omega = \omega \text{ et } \begin{cases} A \cos \psi \cos(\varphi) = a \\ A \cos \psi \sin(\varphi) = 0 \end{cases}.$$

Ainsi,  $\sin(\varphi) = 0$ , puis  $\varphi \equiv 0 \pmod{\pi}$ . En posant  $\varphi = m\pi$ , où  $m$  est un entier, alors  $\cos \varphi = (-1)^m$ , puis  $(-1)^m A \cos \psi = a$ . Les quantités  $A$  et  $a$  étant strictement positives, la quantité  $(-1)^m \cos \psi$  est également strictement positive.

On peut poser  $\tilde{\psi} = \psi - m\pi$  et  $\tilde{\varphi} = \varphi - m\pi$  de sorte que  $\cos \tilde{\psi} = (-1)^m \cos \psi > 0$  :

$$A = \frac{a}{\cos \tilde{\psi}}.$$

De plus,

$$\begin{aligned} \forall (x, t) \in [0, L] \times ]0, +\infty[, y(x, t) &= A \cos(kx - \psi) \cos(\omega t - \varphi) \\ &= A (-1)^m \cos(kx - \tilde{\psi}) (-1)^m \cos(\omega t - \tilde{\varphi}) \\ &= A \cos(kx - \tilde{\psi}) \cos(\omega t - \tilde{\varphi}). \end{aligned}$$

On en déduit donc par l'égalité  $A \cos \tilde{\psi} \cos \tilde{\varphi} = a$  que  $\cos \tilde{\varphi} = 1$ . Le déphasage  $\tilde{\varphi}$  peut être pris dans l'intervalle  $[0, 2\pi[$ ; on a dans ce cas  $\tilde{\varphi} = 0$ .

- en l'abscisse  $x = L$ , on a :

$$\forall t > 0, y(L, t) = 0$$

imposant donc :

$$\forall t > 0, A \cos(kL - \tilde{\psi}) \cos(\omega t) = 0.$$

Par conséquent,  $\cos(kL - \tilde{\psi}) = 0$  imposant  $kL - \tilde{\psi} \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ . On en déduit l'existence d'un entier  $n$  tel que :

$$\tilde{\psi} = kL - \frac{\pi}{2} + n\pi.$$

En regroupant les deux conditions

$$\begin{cases} A = \frac{a}{\cos \tilde{\psi}} \\ \tilde{\psi} = kL - \frac{\pi}{2} + n\pi \end{cases},$$

on en déduit  $\cos \tilde{\psi} = (-1)^n \cos\left(kL - \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n \sin(kL)$  :

$$\begin{aligned} y : (x, t) &\mapsto A \cos\left(kx - kL + \frac{\pi}{2} - n\pi\right) \cos(\omega t) \\ &\mapsto (-1)^n \frac{a}{\cos \tilde{\psi}} \sin\left(\frac{\pi}{2} - k(L - x)\right) \cos(\omega t) \\ &\mapsto (-1)^n a \frac{\sin(k(L - x))}{\cos \tilde{\psi}} \cos(\omega t) \\ &\mapsto a \frac{\sin(k(L - x))}{\sin(kL)} \cos(\omega t). \end{aligned}$$

Lorsque l'abscisse  $x$  est fixée dans  $[0, L]$ , le mouvement de la corde en l'abscisse  $x$  est sinusoïdal, d'amplitude :

$$a \left| \frac{\sin(k(L-x))}{\sin(kL)} \right|.$$

Cette amplitude est maximale lorsque  $|\sin(k(L-x))|$  vaut 1 et cette amplitude maximale vaut  $y_{\max} = \frac{a}{|\sin(kL)|}$ .

Cette amplitude maximale peut théoriquement être infinie, lorsque  $\sin(kL) = 0$ , donc lorsqu'il existe un entier  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$  tel que :

$$kL = n\pi \text{ ou encore } \omega = n \frac{\pi c}{L}.$$

On a dans ce cas une **résonance**. En pratique, l'amortissement du mouvement et la raideur de la corde font que l'amplitude maximale reste finie.

La fréquence associée à ce phénomène de résonance est donc :

$$\nu_n = \frac{\omega}{2\pi} = n \frac{c}{2L}.$$

En régime forcé, on voit apparaître pour ces fréquences de résonance des **nœuds de vibration** et des **ventres de vibration**. Les nœuds correspondent aux abscisses  $x$  pour lesquelles la corde est fixe au cours du temps.

Plus précisément, on observe  $(n+1)$  nœuds aux points d'abscisses  $x$  tels que :

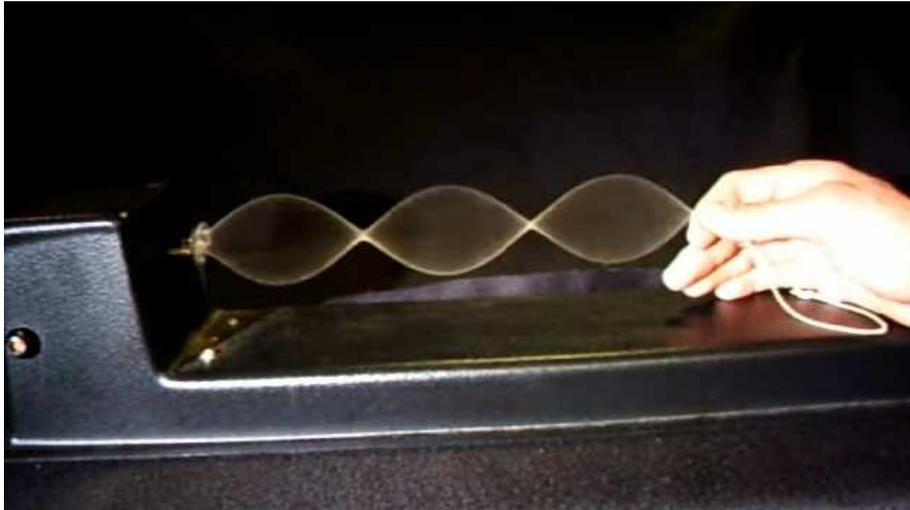
$$\sin(k(L-x)) = 0,$$

donc :  $k(L-x) \equiv 0 \pmod{\pi}$ .

Or,  $kL = n\pi$ .

Il y a donc  $(n+1)$  nœuds correspondant aux abscisses  $x_j$  telles que :

$$x_j = \frac{j}{n} L, \text{ pour } j \in \llbracket 0, n \rrbracket.$$



## 2.2 En coordonnées polaires et en dimension 2

### 2.2.1 Gradient en coordonnées polaires

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction différentiable sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  et on pose la fonction :

$$g : \begin{cases} ]0, +\infty[ \times \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ (r, \theta) & \mapsto g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta) \end{cases}.$$

Cette fonction reste différentiable.

Dans la suite, on note  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  et pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ , la base polaire  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ , la matrice de passage entre la base canonique et cette base polaire étant la matrice de rotation :

$$P = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

On va montrer la formule du gradient de la fonction  $g$  :

$$\overrightarrow{\text{grad}} g(r, \theta) = \frac{\partial g}{\partial r} \cdot \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} \cdot \vec{e}_\theta.$$

En utilisant la règle de la chaîne dans la relation  $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ , on obtient d'une part :

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} \\ &= \cos \theta \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \cdot \frac{\partial f}{\partial y}.\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ &= -r \sin \theta \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos \theta \cdot \frac{\partial f}{\partial y}.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial r} \cdot \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} \cdot \vec{e}_\theta &= \frac{\partial g}{\partial r} \cdot (\cos \theta \cdot \vec{e}_1 + \sin \theta \cdot \vec{e}_2) + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} \cdot (-\sin \theta \cdot \vec{e}_1 + \cos \theta \cdot \vec{e}_2) \\ &= \left( \cos \theta \cdot \frac{\partial g}{\partial r} - \sin \theta \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} \right) \cdot \vec{e}_1 + \left( \sin \theta \cdot \frac{\partial g}{\partial r} + \cos \theta \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} \right) \cdot \vec{e}_2 \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot \vec{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot \vec{e}_2 \\ &= \overrightarrow{\text{grad}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ &= \overrightarrow{\text{grad}} g(r, \theta).\end{aligned}$$

### 2.2.2 Signification du gradient

Si  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est un champ scalaire de classe  $C^1$ , si  $(x, y)$  est un point de  $\mathbb{R}^2$ , le gradient  $\overrightarrow{\text{grad}} f(x, y)$  indique la ligne de la plus grande pente dans ce champ scalaire.

Plus précisément, si  $d\vec{\ell} = dx \cdot \vec{e}_1 + dy \cdot \vec{e}_2$  est un déplacement infinitésimal, alors :

$$\langle \overrightarrow{\text{grad}} f(x, y) \mid d\vec{\ell} \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dy = df(x, y) = f(x + dx, y + dy) - f(x, y).$$

En coordonnées polaires, en notant maintenant  $d\vec{\ell} = dr \cdot \vec{e}_r + r d\theta \cdot \vec{e}_\theta$  le déplacement infinitésimal et en posant  $g : (r, \theta) \mapsto f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ , alors :

$$\begin{aligned}\langle \overrightarrow{\text{grad}} g(r, \theta) \mid d\vec{\ell} \rangle &= \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) dr + \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) d\theta \\ &= dg(r, \theta).\end{aligned}$$

## 2.3 Divergence en coordonnées polaires

Si  $\vec{E} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  est un champ de vecteurs de classe  $C^1$ , en notant le champ  $\vec{F}$  en coordonnées polaires :

$$\vec{F} : (r, \theta) \mapsto \vec{E}(r \cos \theta, r \sin \theta) = F_r \cdot \vec{e}_r + F_\theta \cdot \vec{e}_\theta,$$

alors on a la formule de la divergence :

$$\text{div}(\vec{F})(r, \theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial(rF_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta}.$$

### 2.3.1 Signification de la divergence

Si  $\vec{E} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  est un champ vectoriel de classe  $C^1$ , on montre que si  $d\tau = dx dy$  est une surface élémentaire, alors le flux élémentaire sortant du champ  $\vec{E}$  à travers la surface vaut

$$d\Phi_{\vec{E}}(x, y) = \text{div}(\vec{E})(x, y) d\tau.$$

En effet, en notant pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\vec{E}(x, y) = E_1(x, y) \cdot \vec{e}_1 + E_2(x, y) \cdot \vec{e}_2$ , où  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  est la base canonique de l'espace  $\mathbb{R}^2$  euclidien habituel, alors le flux sortant de la surface  $d\tau = dx dy$  autour du point  $(x, y)$  est calculé par les

quatre produits scalaires du champ  $\vec{E}$  sur chacune des quatre faces du rectangle  $[x, x + dx] \times [y, y + dy]$ . Cela donne le flux élémentaire :

$$\begin{aligned} d\Phi_{\vec{E}}(x, y) &= -E_1(x, y) dy + E_1(x + dx, y) dy - E_2(x, y) dx + E_2(x, y + dy) dx \\ &= \frac{\partial E_1}{\partial x}(x, y) dx dy + \frac{\partial E_2}{\partial y}(x, y) dx dy \\ &= \operatorname{div}(\vec{E})(x, y) d\tau. \end{aligned}$$

### 2.3.2 Retour sur la formule de la divergence en polaires

En utilisant les notations  $\vec{E} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  et  $\vec{F} : (r, \theta) \mapsto \vec{E}(r \cos \theta, r \sin \theta) = F_r \cdot \vec{e}_r + F_\theta \cdot \vec{e}_\theta$ , on cherche à retrouver l'expression de la divergence  $\operatorname{div}(\vec{F})$  à l'aide du flux élémentaire  $d\Phi_{\vec{F}}(r, \theta)$  sortant de la surface élémentaire en polaires  $d\tau = r dr d\theta$ .

Ce flux élémentaire est égal – en ne retenant que l'ordre deux en  $dx dy$  – à :

$$\begin{aligned} d\Phi_{\vec{F}}(r, \theta) &= -F_r(r, \theta) r d\theta + F_r(r + dr, \theta) (r + dr) d\theta - F_\theta(r, \theta) dr + F_\theta(r, \theta + d\theta) dr \\ &= \frac{\partial F_r}{\partial r}(r, \theta) r dr d\theta + F_r(r, \theta) dr d\theta + \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta}(r, \theta) dr d\theta. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{F})(r, \theta) &= \frac{d\Phi_{\vec{F}}(r, \theta)}{r dr d\theta} \\ &= \frac{\partial F_r}{\partial r}(r, \theta) + \frac{F_r(r, \theta)}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta}(r, \theta) \\ &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(r F_r)}{\partial r} + \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} \right)(r, \theta) \end{aligned}$$

d'où l'expression de la divergence en polaires.

## 2.4 Laplacien en coordonnées polaires

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  et on pose la fonction :

$$g : \begin{cases} ]0, +\infty[ \times \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ (r, \theta) & \mapsto g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta) \end{cases}.$$

Cette fonction reste de classe  $C^2$ .

On rappelle que le laplacien du champ scalaire  $f$  en le point  $(x, y)$  est donné par la formule :

$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y).$$

On remarque alors que :

$$\Delta f = \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} f).$$

On va montrer la formule du laplacien en coordonnées polaires :

$$\Delta g(r, \theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial g}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}.$$

En effet, on utilise l'expression du laplacien à l'aide de la divergence du gradient. On obtient successivement avec les notations proposées :

$$\begin{aligned} \Delta g(r, \theta) &= \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} g)(r, \theta) \\ &= \operatorname{div} \left( \frac{\partial g}{\partial r} \cdot \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} \cdot \vec{e}_\theta \right) \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial g}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} \right) \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial g}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}. \end{aligned}$$

## 2.5 Exemple de résolution en polaires

On considère un plan d'eau immobile de hauteur  $H$  et on laisse tomber une goutte d'eau à la verticale d'un point que l'on prend comme origine du repère polaire du plan d'eau. Les variations de hauteur d'eau qui en résultent sont supposées petites par rapport à la hauteur  $H$  initiale du plan d'eau.

On suppose que les conditions initiales concernant la hauteur et la vitesse à l'instant  $t = 0$  où la goutte touche le plan sont à symétrie radiale. Les fonctions  $h_0 : (r, \theta) \mapsto h(r, \theta, 0)$  et  $v_0 : (r, \theta) \mapsto \frac{\partial h}{\partial t}(r, \theta, 0)$  sont deux fonctions indépendantes de l'angle  $\theta$  et ne dépendent que de la variable radiale  $r$ .

On étudie les ondes stationnaires qui résultent de la perturbation de la surface libre du plan d'eau.

En notant  $h : (r, \theta, t) \mapsto h(r, \theta, t)$  la fonction donnant à l'instant  $t > 0$  la hauteur d'eau au point de coordonnées polaires  $(r, \theta)$ , cette fonction vérifie l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = c^2 \Delta h,$$

avec  $c = \sqrt{gH}$ .

On recherche les solutions stationnaires de la forme :

$$h : (r, \theta, t) \mapsto \chi(r, \theta) \cdot \rho(t),$$

où les fonctions spatiale  $\chi : (r, \theta) \mapsto \chi(r, \theta)$  et temporelle  $\rho : t \mapsto$  sont découplées et de classe  $C^2$ .

Par symétrie radiale, la fonction  $\chi$  ne dépend en réalité que la variable  $r$ . On posera  $\chi : r \mapsto \chi(r)$  dans la suite. En réinjectant dans l'équation de d'Alembert la fonction solution stationnaire

$$h : (r, t) \mapsto \chi(r) \cdot \rho(t),$$

on obtient :

$$\forall (r, t) \in ]0, +\infty[^2, \chi(r) \cdot \rho''(t) = c^2 \rho(t) \Delta \chi(r) = c^2 \rho(t) \left( \chi''(r) + \frac{1}{r} \chi'(r) \right).$$

La fonction  $h$  résultant de la perturbation de la surface libre n'est pas la fonction nulle. Il existe  $r_0$  et  $t_0$  dans  $]0, +\infty[$  tel que :

$$h(r_0, t_0) = \chi(r_0) \cdot \rho(t_0) \neq 0.$$

On pose la constante :

$$\lambda = \frac{\rho''(t_0)}{\rho(t_0)} = c^2 \frac{\Delta \chi(r_0)}{\chi(r_0)}$$

de sorte que pour tout  $(r, t) \in ]0, +\infty[$ , on a :

$$\begin{cases} \chi(r) \cdot \rho''(t_0) = c^2 \rho(t_0) \Delta \chi(r) \\ \chi(r_0) \cdot \rho''(t) = c^2 \rho(t) \Delta \chi(r_0) \end{cases},$$

et donc :

$$\begin{cases} \lambda \chi(r) = c^2 \Delta \chi(r) \\ \rho''(t) = \lambda \rho(t) \end{cases}.$$

Les solutions de l'équation différentielle en la fonction  $\rho(\cdot)$  dépendent très fortement du signe de la quantité  $\lambda$ . Physiquement, les amplitudes de hauteur observées sont petites, en tout cas bornées au cours du temps. Cela impose à la quantité  $\lambda$  d'être strictement négative. On pose dans la suite :

$$\lambda = -\omega^2, \text{ avec } \omega > 0.$$

Les solutions de l'équation  $\rho'' + \omega^2 \rho$  forment le plan vectoriel :

$$\text{Vect}(\rho_1 : t \mapsto \cos(\omega t), \rho_2 : t \mapsto \sin(\omega t)).$$

On résout maintenant l'équation

$$\lambda \chi = c^2 \Delta \chi$$

d'inconnue  $\chi : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$ . On pose dans la suite le vecteur d'onde :

$$k = \frac{\omega}{c},$$

de sorte que l'équation à résoudre devient :

$$\Delta\chi = -k^2 \chi, \text{ ou encore } \chi'' + \frac{1}{r}\chi' + k^2 \chi = 0.$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du deuxième ordre, homogène et normalisée. L'ensemble des solutions forme un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 2.

On commence à chercher les solutions à cette équation et développables en série entière sur  $]0, +\infty[$ .

On procède par analyse / synthèse.

En phase d'analyse, soit

$$\chi : r \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n,$$

une solution DSE éventuelle à cette équation différentielle. On note  $R > 0$  son rayon de convergence.

On obtient donc :

$$\begin{aligned} \chi & : r \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \\ \chi' & : r \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n r^{n-1} \\ \chi'' & : r \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n r^{n-2} \end{aligned}$$

Par unicité du DSE, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le coefficient en  $r^n$  est nul, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+2)a_{n+2} + k^2 a_n = 0, \text{ donc } a_{n+2} = -\frac{k^2}{(n+2)^2} a_n \quad [ \text{égalité } \star ]$$

Il apparaît que pour tout  $p \in \mathbb{N}$  :

$$a_{2p+2} = -\frac{k^2}{(2p+2)^2} a_{2p} \text{ et } a_{2p+3} = -\frac{k^2}{(2p+3)^2} a_{2p+1}.$$

Or, en appliquant l'égalité  $\star$  à l'entier  $n = -1$ , on obtient :

$$a_1 = 0.$$

Une autre façon de l'obtenir est, dans l'équation différentielle de départ multipliée par  $r$  :

$$r \chi'' + \chi' + k^2 r \chi = 0$$

en évaluant le tout en  $r > 0$  puis en faisant tendre  $r$  vers  $0^+$ , on obtient :

$$a_1 = \chi'(0) = 0.$$

Une récurrence facile montre que pour tout entier naturel  $p$ , on a :

$$a_{2p+1} = 0.$$

Une autre récurrence facile montre que pour tout entier naturel  $p$  :

$$a_{2p} = (-1)^p \frac{k^{2p}}{4^p (p!)^2} a_0.$$

On remarque que :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{|a_{2p+2}|}{|a_{2p}|} = 0.$$

En synthèse, en utilisant les formules données ci-dessus pour  $a_{2p}$  en fonction de  $p$  et de  $a_0$ , on définit la **fonction de Bessel** :

$$J_0 : r \mapsto \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{r^{2p}}{4^p (p!)^2},$$

qui est une fonction développable en série entière et de rayon de convergence infini.

En posant alors la fonction

$$L_0 : r \mapsto J_0(kr),$$

on voit que l'ensemble des solutions DSE à l'équation différentielle de départ est une droite vectorielle incluse dans le plan vectoriel des solutions, cette droite vectorielle étant :

$$\text{Vect}(L_0).$$

On va maintenant montrer que la fonction  $\chi$  appartient à cette droite vectorielle.

En effet, la fonction  $\chi : r \mapsto \chi(r)$  donnant la hauteur d'eau est une fonction bornée sur  $]0, +\infty[$ .

Supposons que la fonction  $\chi$  n'appartienne pas à la droite vectorielle  $\text{Vect}(L_0)$ . La famille  $(\chi, L_0)$  est donc libre dans le plan vectoriel des solutions de l'équation différentielle d'ordre deux normalisée : il s'agit d'une base.

On note :

$$W : r \mapsto \begin{vmatrix} \chi(r) & L_0(r) \\ \chi'(r) & L_0'(r) \end{vmatrix} = \chi(r) \cdot L_0'(r) - L_0(r) \cdot \chi'(r)$$

le wronskien de cette base de solutions.

On en déduit que la fonction  $W(\cdot)$  est de classe  $C^1$  et après simplifications :

$$W' : r \mapsto \chi(r) \cdot L_0''(r) - L_0(r) \cdot \chi''(r).$$

Or, comme :

$$\forall r > 0, \begin{cases} \chi''(r) = -\frac{1}{r} \chi'(r) - k^2 \chi(r) \\ L_0''(r) = -\frac{1}{r} L_0'(r) - k^2 L_0(r) \end{cases}$$

on en déduit après simplifications de deux termes :

$$W' : r \mapsto -\frac{1}{r} (\chi(r) L_0'(r) - \chi'(r) L_0(r)) = -\frac{1}{r} W(r).$$

La fonction  $W$  est donc de la forme :

$$W : r \mapsto C \exp(-\ln r) = \frac{C}{r},$$

pour une certaine constante  $C$  non nulle, le wronskien d'une base de solutions ne pouvant s'annuler.

On en déduit :

$$\forall r > 0, \chi(r) \cdot L_0'(r) - L_0(r) \cdot \chi'(r) = \frac{C}{r}.$$

Lorsque  $r$  tend vers  $0^+$ , puisque  $L_0(0) = 1$  et  $L_0'(0) = 0$ , alors :

$$\chi'(r) \sim -\frac{C}{r}.$$

La fonction  $\chi'$  garde un signe constant localement en  $0^+$ .

Supposons par exemple  $C > 0$ . En prenant  $D = \frac{C}{2}$ , alors  $0 < D < C$  et il existe  $\alpha > 0$  tel que :

$$\forall r \in ]0, \alpha], \chi'(r) \leq -\frac{D}{r}.$$

En intégrant maintenant cette inégalité, par croissance de l'intégrale, on obtient :

$$\begin{aligned} \forall r \in ]0, \alpha], \chi(\alpha) - \chi(r) &= \int_r^\alpha \chi'(u) du \\ &\leq -\int_r^\alpha \frac{D}{u} du \\ &= D [\ln r - \ln \alpha], \end{aligned}$$

qui est une quantité qui tend vers  $-\infty$  en  $0^+$ .

On aboutit à une contradiction. Si l'on avait supposé  $C < 0$ , on aurait obtenu que la quantité  $\chi(r)$  tendrait vers  $+\infty$  en  $0^+$ , tout aussi contradictoire.

Conclusion, la fonction  $\chi$  appartient bien à la droite vectorielle  $\text{Vect}(L_0)$  et la fonction  $\chi$  est bien développable en série entière, colinéaire à la fonction  $L_0$ .

L'équation de départ :

$$\chi'' + \frac{1}{r} \chi' + k^2 \chi = 0 \iff r^2 \chi'' + r \chi' + k^2 r^2 \chi = 0$$

est une **équation de type Bessel** et les solutions développables en série entière de cette équation s'apparentent à des **fonctions de Bessel**.

On peut montrer en utilisant le cours sur les intégrales à paramètres que la fonction de Bessel  $J_0$  peut aussi s'exprimer selon :

$$J_0 : r \mapsto \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(r \sin u) \, du.$$

Voici un tracé de la fonction  $r \mapsto J_0(r)$  définie ci-dessus :

