

Chapitre : la relation de Bernoulli



Table des matières

1	Opérateurs	2
1.1	Opérateur ∇	2
1.1.1	Définition	2
1.1.2	Interprétation	2
1.2	Opérateur divergence	2
1.2.1	Définition	2
1.2.2	Interprétation	3
1.2.3	Formule de Gauss–Ostrogradski	3
1.3	Opérateur laplacien scalaire ou vectoriel	3
1.4	Opérateur rotationnel	3
1.4.1	Définition	3
1.4.2	Interprétation	4
1.4.3	Formule de Stokes	5
1.5	Des exemples de calculs en coordonnées sphériques	6
1.5.1	Déplacement élémentaire	6
1.5.2	Gradient en sphériques	6
1.5.3	Divergence en sphériques	7
1.5.4	Laplacien en sphériques	7
2	Viscosité dynamique	8
2.1	Mise en évidence expérimentale	8
2.2	Mise en équation	8

3	Accélération particulière	9
3.1	Définition	9
3.2	Application au champ des vitesses	10
4	Théorème d'Euler	11
4.1	Vocabulaire liée aux hypothèses	11
4.2	Équation de continuité	11
4.3	Lignes de courant dans un champ vectoriel et trajectoires	12
4.4	Relation de Bernoulli	12
4.5	Une application aéronautique de la relation de Bernoulli	13
4.5.1	Profil d'aile d'avion	13

1 Opérateurs

1.1 Opérateur $\vec{\nabla}$

1.1.1 Définition

Soit \mathcal{D} une partie de l'espace affine euclidien habituel \mathbb{R}^3 . Soit $n \geq 1$ un entier naturel. On pose $\mathcal{B}_e = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de \mathbb{R}^n , puis $\mathcal{B}_e^* = (\vec{e}_1^*, \dots, \vec{e}_n^*)$ sa base duale. On note $\langle \cdot | \cdot \rangle$ le produit scalaire habituel sur \mathbb{R}^n . On considère un champ scalaire ou vectoriel :

$$F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

différentiable – c'est-à-dire que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'application $F_i = \vec{e}_i^* \circ F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable.

On a ainsi la notation :

$$F = (F_1, \dots, F_n).$$

L'opérateur nabla $\vec{\nabla}$ agit sur les champs scalaires ou vectoriels de la façon suivante : avec la notation déjà introduite pour le champ $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, on pose :

$$\vec{\nabla} F : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D} \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^3 \\ a \longmapsto \left(\frac{\partial F}{\partial x}(a), \frac{\partial F}{\partial y}(a), \frac{\partial F}{\partial z}(a) \right) \end{array} \right. .$$

En notant les variables x_1, x_2 et x_3 au lieu de x, y et z , l'application $\vec{\nabla} F$ s'apparente à un champ matriciel :

$$\vec{\nabla} F : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{M}_{n,3}(\mathbb{R}) \\ (x_1, x_2, x_3) \longmapsto \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_1, x_2, x_3) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n; \\ 1 \leq j \leq 3}} \end{array} \right. .$$

Cet opérateur est linéaire.

On s'intéressera souvent à des champs scalaires $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiables pour lesquels l'entier n vaut 1. Dans ce cas, cet opérateur $\vec{\nabla}$ s'apparente au gradient du champ vectoriel F :

$$\vec{\nabla} = \overrightarrow{\text{grad}}$$

et pour tout champ scalaire différentiable $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et pour tout $a \in \mathcal{D}$, le gradient $\vec{\nabla} F(a)$ est le vecteur

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}(a), \frac{\partial F}{\partial y}(a), \frac{\partial F}{\partial z}(a) \right) \text{ de l'espace } \mathbb{R}^3.$$

1.1.2 Interprétation

Si $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ est un champ différentiable scalaire et si $a \in \mathcal{D}$, alors le vecteur $\vec{\nabla} F(a)$ indique la direction et le sens de la plus forte variation du champ F localement au point a .

Plus précisément, si $a \in \mathcal{D}$ et si h est un vecteur de norme petite tel que le point $a + h$ reste dans l'ensemble \mathcal{D} , alors :

$$F(a + h) = F(a) + \langle \overrightarrow{\text{grad}} F(a) | h \rangle + o(\|h\|).$$

Le physicien écrira plutôt :

$$F(a + \vec{d}\ell) = F(a) + \overrightarrow{\text{grad}} F(a) \cdot \vec{d}\ell.$$

1.2 Opérateur divergence

1.2.1 Définition

L'opérateur divergence agit sur les champs vectoriels différentiables de la façon suivante : si $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est un tel champ, on pose la divergence :

$$\text{div } F : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R} \\ a \longmapsto \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(a) \end{array} \right. .$$

Cet opérateur est linéaire et s'apparente à l'opérateur :

$$\text{div} = \langle \vec{\nabla} | \cdot \rangle.$$

1.2.2 Interprétation

Sous les notations précédentes, la divergence $\operatorname{div} F$ indique le flux local sortant du champ vectoriel F .

En effet, si on considère un champ vectoriel $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ différentiable, en notant un élément de volume élémentaire $d\tau = dx \, dy \, dz$ de fluide emprisonné dans le pavé $[x, x + dx] \times [y, y + dy] \times [z, z + dz]$, en notant $F = (F_1, F_2, F_3)$, le flux sortant de cet élément de volume vaut :

$$\begin{aligned} d\Phi(x, y, z) &= -F_3(x, y, z) \, dx \, dy + F_3(x, y, z + dz) \, dx \, dy - F_2(x, y, z) \, dx \, dz + F_2(x, y + dy, z) \, dx \, dz \\ &\quad - F_1(x, y, z) \, dy \, dz + F_1(x + dx, y, z + dz) \, dy \, dz \\ &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial z}(x, y, z) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y, z) \right) dx \, dy \, dz \\ &= \operatorname{div} F(x, y, z) \, d\tau. \end{aligned}$$

1.2.3 Formule de Gauss-Ostrogradski

Soit $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ un champ vectoriel de classe C^1 défini sur une partie \mathcal{D} de \mathbb{R}^3 délimitée par une frontière $\partial\mathcal{D}$. On a alors la formule de Gauss-Ostrogradski :

$$\iiint_{\mathcal{D}} \operatorname{div} F \, d\tau = \iint_{\partial\mathcal{D}} \langle F \mid d\vec{S} \rangle,$$

où $d\vec{S}$ indique le vecteur normal à la surface élémentaire dS pointant vers l'extérieur du volume \mathcal{D} .

1.3 Opérateur laplacien scalaire ou vectoriel

L'opérateur **laplacien scalaire** agit sur les champs scalaires de classe C^2 de la façon suivante : si $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ est un champ scalaire de classe C^2 , en posant $F = (F_1, \dots, F_n)$ à l'aide des applications partielles F_i on pose le laplacien :

$$\Delta F : \begin{cases} \mathcal{D} & \rightarrow \mathbb{R} \\ a & \mapsto \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F_i}{\partial x_i^2}(a) \end{cases} .$$

Cet opérateur est encore linéaire et s'apparente à l'opérateur :

$$\Delta = \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}) = \langle \overrightarrow{\nabla} \mid \overrightarrow{\nabla} \rangle.$$

Si $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un champ vectoriel de classe C^2 , l'opérateur **laplacien vectoriel** agit coordonnées par coordonnées. En posant le champ $F = (F_1, \dots, F_n)$, en utilisant la notation Δ pour le laplacien scalaire, on définit le laplacien vectoriel encore noté Δ par :

$$\Delta F : \begin{cases} \mathcal{D} & \rightarrow \mathbb{R}^n \\ a & \mapsto (\Delta F_1(a), \dots, \Delta F_n(a)) \end{cases} .$$

L'opérateur laplacien vectoriel est un opérateur linéaire sur l'espace des champs de classe C^2 définis de \mathcal{D} vers \mathbb{R}^n .

1.4 Opérateur rotationnel

1.4.1 Définition

L'opérateur **rotationnel** agit sur les champs vectoriels à valeurs dans \mathbb{R}^3 et différentiables de la façon suivante : si $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ est un champ scalaire différentiable, on pose le rotationnel :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} F : \begin{cases} \mathcal{D} & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ a & \mapsto \left(\frac{\partial F_3}{\partial y}(a) - \frac{\partial F_2}{\partial z}(a), \frac{\partial F_1}{\partial z}(a) - \frac{\partial F_3}{\partial x}(a), \frac{\partial F_2}{\partial x}(a) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(a) \right) \end{cases} .$$

Cet opérateur est encore linéaire et s'apparente à l'opérateur :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} = \overrightarrow{\nabla} \wedge .$$

1.4.2 Interprétation

Cet opérateur indique la rotation locale du champ F .

En effet, si \vec{u} est un vecteur de \mathbb{R}^3 , l'application – aussi appelé **torseur**

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \vec{x} & \longmapsto \vec{u} \wedge \vec{x} \end{cases}$$

est linéaire.

▷ Si le vecteur \vec{u} est nul, alors l'application f est nulle.

▷ On suppose maintenant le vecteur \vec{u} non nul. Dans ce cas, on a rapidement :

$$\text{Ker}(f) = \text{Vect}(\vec{u}) \text{ et } \text{Im}(f) = \text{Vect}(\vec{u})^\perp.$$

En considérant une base orthonormée directe $\mathcal{C} = (\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3)$ adaptée à la décomposition

$$\mathbb{R}^3 = \text{Vect}(\vec{u})^\perp \oplus \text{Vect}(\vec{u}),$$

en posant $\rho = \|\vec{u}\|$ la norme du vecteur \vec{u} , la matrice A représentant l'application linéaire f selon la base \mathcal{C} est :

$$A = \rho \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient une matrice anti-symétrique et la matrice de passage P de la base canonique vers \mathcal{C} étant une matrice orthogonale, alors la matrice PAP^{-1} représentant f selon la base canonique reste une matrice anti-symétrique. Le bloc $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est associé à la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{2}$.

On va montrer que le rotationnel est lié à la circulation sur les contours de surfaces fermées et donc est lié au caractère tournant du champ vectoriel.

Soit $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ un champ vectoriel différentiable. On considère un élément de surface dS inclus dans l'hyperplan affine $\mathcal{H}_{z_0} = (\vec{e}_3^*)^{-1}(\{z_0\})$, où z_0 est un réel fixé, l'élément de surface étant $[x, x+dx] \times [y, y+dy] \times \{z_0\}$.

On considère la circulation du champ vectoriel F le long du contour de la surface, ce contour étant décrit dans le sens trigonométrique, l'hyperplan \mathcal{H}_{z_0} étant orienté par le vecteur \vec{e}_3 .

On en déduit la circulation élémentaire :

$$\begin{aligned} dC &= dx F_1(x, y, z_0) + dy F_2(x+dx, y, z_0) - dx F_1(x, y+dy, z_0) - dy F_2(x, y, z_0) \\ &= -dx dy \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y, z_0) + dx dy \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y, z_0) \\ &= \langle \overrightarrow{\text{rot}} F(x, y, z_0) \mid dx dy \cdot \vec{e}_3 \rangle, \\ &= \langle \overrightarrow{\text{rot}} F(x, y, z_0) \mid d\vec{S} \rangle, \end{aligned}$$

où le vecteur surface élémentaire est :

$$d\vec{S} = dx dy \vec{e}_3.$$

En guise d'application numérique, si l'on considère le champ vectoriel :

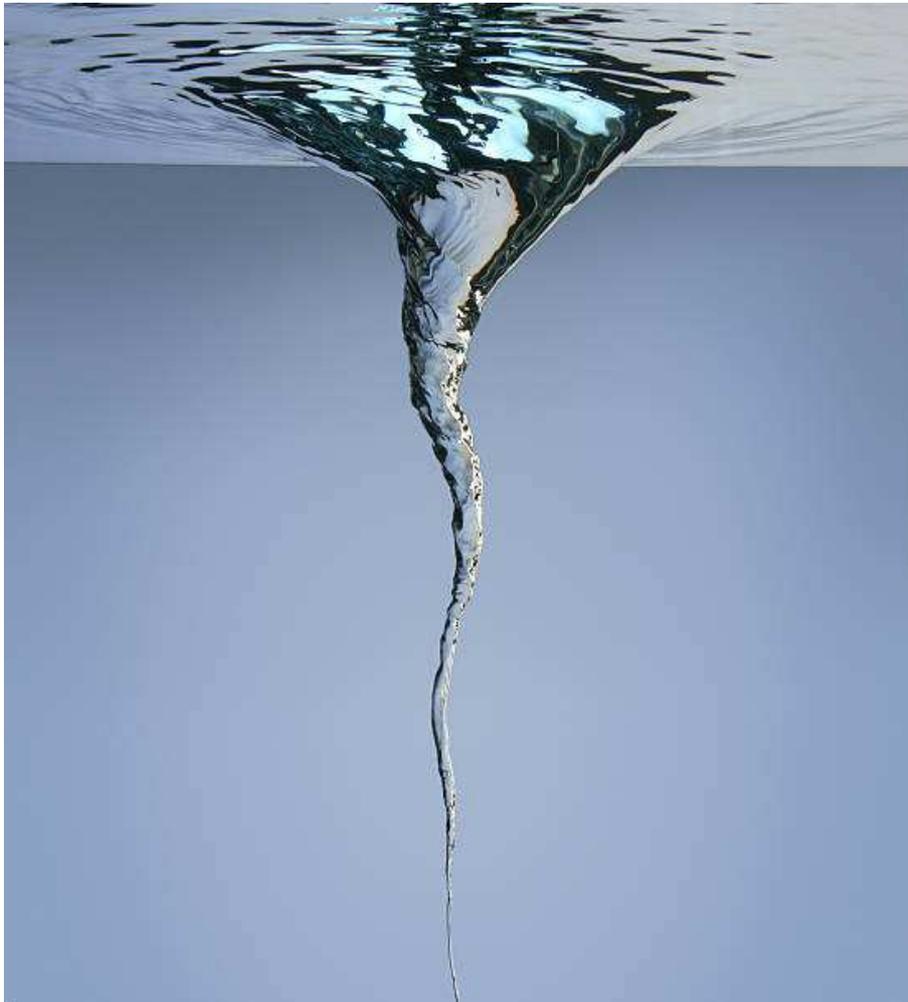
$$F : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto (-y, x, 0) \end{cases}$$

alors le rotationnel de ce champ est constant :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \overrightarrow{\text{rot}} F(x, y, z) = (0, 0, 2).$$

Ici, le rotationnel $\overrightarrow{\text{rot}} F$ est constant, de vecteur constant positivement lié au vecteur \vec{e}_3 , indiquant un champ tournant dans le sens trigonométrique.

On a plutôt affaire ici à un écoulement tournant ou encore à rotationnel non nul.



Considérons à l'opposé le champ vectoriel défini par :

$$F : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto (\varphi(x, y), 0, 0) \end{cases} ,$$

où la fonction $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable.

On obtient rapidement que le rotationnel $\overrightarrow{\text{rot}} F$ est nul.

On a plutôt affaire ici à un écoulement irrotationnel ou non tournant.



1.4.3 Formule de Stokes

Soit $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un champ vectoriel de classe C^1 , défini sur une partie \mathcal{D} de l'espace affine \mathbb{R}^3 .

Soit S une surface incluse dans \mathcal{D} , surface délimitée par un contour C .

On dispose de la formule de Stokes :

$$\iint_S \langle \overrightarrow{\text{rot}} F \mid d\vec{S} \rangle = \oint_C \langle F \mid d\vec{\ell} \rangle,$$

où le vecteur $d\vec{S}$ est orthogonal à la surface S , dans le sens définissant l'orientation de parcours trigonométrique du contour C .

Lorsque la partie $S = \mathcal{D}$ est une partie incluse dans $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ délimitée par un contour $\partial S = C$, alors on dispose de la formule de Green-Riemann, en posant le champ :

$$F : (x, y, 0) \mapsto (P(x, y), Q(x, y), 0)$$

alors la formule de Stokes devient :

$$\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_C P dx + Q dy.$$

1.5 Des exemples de calculs en coordonnées sphériques

1.5.1 Déplacement élémentaire

On considère le système de coordonnées sphériques : chaque point M de l'espace affine euclidien habituel \mathbb{R}^3 est repéré par ses trois coordonnées dans le repère :

$$\mathcal{R} = (0, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z),$$

où la famille $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est la base canonique de \mathbb{R}^3 .

On décide de repérer les points $M \in \mathbb{R}^3$ par leurs coordonnées sphériques (r, θ, φ) , où r est la distance du point M à l'origine 0 du repère, l'angle θ est la colatitude et l'angle φ est la longitude.

On pose la base sphérique orthonormée directe $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$, avec :

$$\vec{e}_r = (\sin \theta \cdot \cos \varphi, \sin \theta \cdot \sin \varphi, \cos \theta)$$

puis :

$$\vec{e}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$$

et enfin :

$$\vec{e}_\theta = \vec{e}_\varphi \wedge \vec{e}_r = (\cos \theta \cdot \cos \varphi, \cos \theta \cdot \sin \varphi, -\sin \theta).$$

On veut maintenant différentier le vecteur position $\overrightarrow{0M} = r \cdot \vec{e}_r$.

On en déduit déjà :

$$d\overrightarrow{0M} = dr \cdot \vec{e}_r + r \cdot d\vec{e}_r.$$

Or,

$$\begin{aligned} d\vec{e}_r &= d(\sin \theta \cdot \cos \varphi, \sin \theta \cdot \sin \varphi, \cos \theta) \\ &= (\cos \theta \cdot \cos \varphi d\theta - \sin \theta \cdot \sin \varphi d\varphi, \cos \theta \cdot \sin \varphi d\theta + \sin \theta \cdot \cos \varphi d\varphi, -\sin \theta d\theta) \\ &= d\theta \cdot \vec{e}_\theta + \sin \theta d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi. \end{aligned}$$

Conclusion :

$$d\overrightarrow{0M} = dr \cdot \vec{e}_r + r d\theta \cdot \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi.$$

1.5.2 Gradient en sphériques

On exprime maintenant le gradient en sphériques.

Soit $F : (r, \theta, \varphi) \mapsto F(r, \theta, \varphi)$ un champ scalaire de classe C^1 pour simplifier, défini sur l'ouvert $]0, +\infty[\times \mathbb{R}^2$.

On fixe un triplet (r, θ, φ) dans $]0, +\infty[\times \mathbb{R}^2$.

On cherche un vecteur (a, b, c) dans la base sphérique – c'est-à-dire que la notation (a, b, c) renvoie au vecteur $a \cdot \vec{e}_r + b \cdot \vec{e}_\theta + c \cdot \vec{e}_\varphi$ – tel que :

$$dF(r, \theta, \varphi) = \langle (a, b, c) \mid d\overrightarrow{0M} \rangle.$$

Or,

$$dF(r, \theta, \varphi) = \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta, \varphi) \cdot dr + \frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta, \varphi) \cdot d\theta + \frac{\partial F}{\partial \varphi}(r, \theta, \varphi) \cdot d\varphi$$

et :

$$\langle (a, b, c) \mid d\vec{0M} \rangle = a dr + b r d\theta + c r \sin \theta d\varphi.$$

On travaille alors dans le sous-ensemble ouvert $]0, +\infty[\times \sin^{-1}(\mathbb{R}^*) \times \mathbb{R} = \mathcal{U}$, ce qui donne pour tout (r, θ, φ) appartenant à \mathcal{U} , les composantes convenables suivantes :

$$a = \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta, \varphi), b = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta, \varphi) \text{ et } c = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F}{\partial \varphi}(r, \theta, \varphi).$$

On a donc l'expression du gradient en sphériques :

$$\vec{\text{grad}} F = \frac{\partial F}{\partial r} \cdot \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \cdot \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \cdot \vec{e}_\varphi.$$

1.5.3 Divergence en sphériques

On exprime ensuite la divergence en sphériques.

Soit $F : (r, \theta, \varphi) \mapsto F_r(r, \theta, \varphi) \cdot \vec{e}_r + F_\theta(r, \theta, \varphi) \cdot \vec{e}_\theta + F_\varphi(r, \theta, \varphi) \cdot \vec{e}_\varphi$, un champ vectoriel de classe C^1 défini sur la partie ouverte \mathcal{U} de \mathbb{R}^3 définie ci-dessus.

On considère un élément de volume élémentaire

$$d\tau = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi.$$

On considère le flux extérieur Φ_F et $d\Phi_F$ le flux extérieur élémentaire à l'élément de volume $d\tau$.

On en déduit en étudiant les différentes faces :

$$\begin{aligned} d\Phi_F &= F_r(r + dr, \theta, \varphi) \times (r + dr)^2 \sin \theta d\theta d\varphi - F_r(r, \theta, \varphi) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi + \\ &F_\varphi(r, \theta, \varphi + d\varphi) r d\theta dr - F_\varphi(r, \theta, \varphi) r d\theta dr + \\ &F_\theta(r, \theta + d\theta, \varphi) dr \sin(\theta + d\theta) r d\varphi - F_\theta(r, \theta, \varphi) dr \sin \theta r d\varphi. \end{aligned}$$

On en déduit en ne retenant que les termes en $dr d\theta d\varphi$:

$$\begin{aligned} d\Phi_F &= \frac{\partial F_r}{\partial r}(r, \theta, \varphi) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi + F_r(r, \theta, \varphi) 2r \sin \theta dr d\theta d\varphi + \\ &\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}(r, \theta, \varphi) r dr d\theta d\varphi + F_\theta(r, \theta, \varphi) r \cos \theta dr d\theta d\varphi + \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta}(r, \theta, \varphi) r \sin \theta dr d\theta d\varphi. \end{aligned}$$

On en déduit en rappelant que $d\tau = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$:

$$d\Phi_F = \left(\frac{\partial F_r}{\partial r} + \frac{2}{r} F_r + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} F_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} \right) d\tau.$$

On a donc l'expression de la divergence en sphériques :

$$\text{div } F = \frac{\partial F_r}{\partial r} + \frac{2}{r} F_r + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} F_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta}.$$

1.5.4 Laplacien en sphériques

On termine par les formules du laplacien en sphériques.

Soit $F : (r, \theta, \varphi) \mapsto F(r, \theta, \varphi)$ un champ scalaire de classe C^2 défini de l'ouvert $\mathcal{U} =]0, +\infty[\times \sin^{-1}(\mathbb{R}^*) \times \mathbb{R}$ vers \mathbb{R} .

On rappelle que le laplacien de ce champ scalaire F est égal à :

$$\Delta F = \text{div} \left(\vec{\text{grad}} F \right).$$

Il suffit de réinjecter les formules précédentes.

On a dans la base sphérique :

$$\vec{\text{grad}} F = \frac{\partial F}{\partial r} \cdot \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \cdot \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \cdot \vec{e}_\varphi.$$

On en déduit :

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} \frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}.$$

2 Viscosité dynamique

2.1 Mise en évidence expérimentale

On considère un bassin rempli d'un fluide et on place une planche flottant à la surface.

On exerce alors une force tirant horizontalement cette planche. Cette force met en mouvement la planche qui entraîne avec elle des couches de fluide, freinant le mouvement.

Les frottements dépendent essentiellement de la nature du fluide et produisent des forces de cisaillement à l'intérieur du fluide. Ces forces de cisaillement sont horizontales, dans un écoulement laminaire de Couette.

Un autre expérience de Maurice Couette (19^{ème} siècle) consiste à considérer deux couronnes cylindriques concentriques délimitant un volume pouvant contenir un fluide. Ces deux couronnes cylindriques de même axe de révolution peuvent tourner librement l'une par rapport à l'autre et on peut faire tourner l'un des cylindres.

On place un fluide dans le compartiment entre les deux cylindres et on fait tourner l'un des deux cylindres. Le liquide entraîne par rotation – et viscosité... – l'autre cylindre. La vitesse de rotation de l'autre cylindre initialement immobile dépend de la vitesse de rotation du cylindre que l'on fait tourner ainsi que du fluide inséré.

2.2 Mise en équation

On considère la première expérience plus simple d'une planche posée sur un plan d'eau, le mouvement de la planche étant rectiligne.

On note S l'aire de la planche rectangulaire flottant sur la surface.

On considère un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ adapté : le vecteur \vec{e}_1 est positivement lié à la force \vec{F} exercée sur la planche. Le vecteur \vec{e}_3 est orthogonal au plan d'eau qui est donc le plan affine $0 + \text{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \text{Ker}(\vec{e}_3^*)$.

La force $\vec{F} = F \cdot \vec{e}_1$ exercée sur la planche est supposée constante. Le mouvement de la planche est donc unidirectionnel, selon l'axe croissant des abscisses.

On considère un élément de fluide élémentaire $d\tau = dx dy dz$ et on considère les forces de cisaillement qui s'exercent sur cet élément de volume. Ces forces de cisaillement sont des vecteurs appartenant à $\text{Vect}(\vec{e}_1)$.

Les forces de cisaillement se produisent sur les deux faces horizontales de l'élément de volume.

On rappelle qu'une force de frottement fluide qu'exerce un système S_1 sur un système S_2 est lié à la surface de contact et à la vitesse de déplacement relative du système S_1 par rapport au système S_2 .

La symétrie du problème montre que le champ de vitesse du fluide qui découle du déplacement de la planche selon l'axe des abscisses est un champ de la forme :

$$\vec{v} : (x, y, z) \mapsto (v_x(z), 0, 0).$$

On considère maintenant un élément de volume élémentaire $d\tau = dx dy dz = dS \cdot dz$ placée entre les altitudes z et $z + dz$, se déplaçant à l'altitude z à la vitesse $\vec{v}(z) = v_x(z) \cdot \vec{e}_1$ selon l'axe des abscisses. Les forces de cisaillement élémentaires qui s'exercent sur cet élément de volume sont décomposables en deux forces élémentaires :

- la force de cisaillement qu'exerce la couche supérieure placée entre les altitudes $z + dz$ et $z + 2dz$; cette force de cisaillement s'apparente à une force de frottement fluide qui est proportionnelle au gradient de vitesse $\overrightarrow{\text{grad}} \vec{v}(z + dz) = \frac{\partial v_x(z)}{\partial z}(z + dz) \cdot \vec{e}_1$ et également proportionnelle à la surface de contact $dS = dx dy$; cette première force élémentaire vaut donc :

$$\begin{aligned} d\vec{F}(z + dz) &= \eta \cdot dx dy \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}(z + dz) \\ &= \eta dS \frac{\partial v_x}{\partial z}(z + dz) \cdot \vec{e}_1. \end{aligned}$$

- la force de cisaillement qu'exerce la couche inférieure placée entre les altitudes z et $z + dz$ cette seconde force élémentaire vaut donc par le principe d'action/réaction :

$$\begin{aligned} d\vec{F}(z) &= -\eta \cdot dx dy \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}(z) \\ &= -\eta dS \frac{\partial v_x}{\partial z}(z) \cdot \vec{e}_1. \end{aligned}$$

Le bilan des forces élémentaires de cisaillement horizontal sur cet élément de volume est donc :

$$\begin{aligned}
d\vec{F}_{vis} &= d\vec{F}(z + dz) + d\vec{F}(z) \\
&= \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial z}(z + dz) - \frac{\partial v_x}{\partial z}(z) \right) dS \cdot \vec{e}_1 \\
&= \eta \frac{\partial^2 v_x(z)}{\partial z^2} dS dz \cdot \vec{e}_1 \\
&= \eta \frac{\partial^2 v_x(z)}{\partial z^2} d\tau \cdot \vec{e}_1.
\end{aligned}$$

On définit alors la densité volumique des forces de viscosité par :

$$\vec{f}_{vis} = \frac{d\vec{F}_{vis}}{d\tau} = \eta \frac{\partial^2 v_x(z)}{\partial z^2} \cdot \vec{e}_1.$$

Le coefficient η est appelé **coefficient de viscosité dynamique** du fluide. Ce coefficient quantifie les forces de frottements liées aux déplacements des couches horizontales de fluide les unes par rapport aux autres.

Dans un cadre plus général où les forces de cisaillement n'appartiennent par seulement à un sous-espace vectoriel de dimension 1 de \mathbb{R}^3 , on remarque que les actions des forces sur l'élément de volume sont linéaires en ces forces. De plus, on remarque que l'opérateur laplacien vectoriel est un opérateur linéaire.

On rappelle brièvement la définition de cet opérateur :

$$\Delta : \left\{ \begin{array}{l} C^2(\mathcal{A}, \mathbb{R}^3) \\ F : a \mapsto (F_x(a), F_y(a), F_z(a)) \end{array} \right. \longrightarrow C^0(\mathcal{A}, \mathbb{R}^3) \mapsto \Delta F : a \mapsto (\Delta F_x(a), \Delta F_y(a), \Delta F_z(a))$$

où la partie \mathcal{A} est un sous-ensemble de \mathbb{R}^3 et les symboles Δ qui apparaissent dans cette définition correspondent au laplacien scalaire :

$$\Delta G(a) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 G}{\partial x_i^2}(a)$$

Dans ce cadre plus général, on obtient l'expression suivante des forces de viscosité pour un élément de volume élémentaire $d\tau = dx dy dz$:

$$d\vec{F}_{vis} = \eta \cdot \Delta \vec{v} = \eta \cdot (\Delta v_x, \Delta v_y, \Delta v_z).$$

3 Accélération particulaire

3.1 Définition

On considère une particule évoluant dans un champ scalaire ou vectoriel $F : \mathcal{D} \times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^n$, ce champ étant de classe C^1 pour simplifier. L'ensemble \mathcal{D} est une partie de \mathbb{R}^3 et concerne l'ensemble contenant les variables spatiales et l'intervalle $[0, +\infty[$ de \mathbb{R} concerne l'ensemble des valeurs temporelles possibles.

À l'instant t , la particule est en position (x, y, z) et à l'instant $t + dt$, elle est en position $(x + dx, y + dy, z + dz)$.

On en déduit la dérivée particulaire de la quantité F au cours du temps :

$$\begin{aligned}
\frac{DF}{Dt} &= \frac{F(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt) - F(x, y, z, t)}{dt} \\
&= \frac{dx}{dt} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z, t) + \frac{dy}{dt} \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z, t) + \frac{dz}{dt} \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z, t) + \frac{\partial F}{\partial t}(x, y, z, t) \\
&= \frac{\partial F}{\partial t}(x, y, z, t) + \langle \vec{v} \mid \vec{\nabla} \rangle (F)(x, y, z, t).
\end{aligned}$$

Le terme $\langle \vec{v} \mid \vec{\nabla} \rangle (F)(x, y, z, t)$ est la composante **convective** (liée au déplacement spatial de la particule) de la dérivée particulaire.

3.2 Application au champ des vitesses

On considère le champ vectoriel des vitesses, supposé de classe C^1 :

$$\vec{v} : \begin{cases} \mathcal{D} & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) & \mapsto (v_x(x, y, z, t), v_y(x, y, z, t), v_z(x, y, z, t)) \end{cases} .$$

On en déduit l'accélération particulière :

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{D\vec{v}}{Dt} \\ &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \langle \vec{v} | \vec{\nabla} \rangle (\vec{v}). \end{aligned}$$

On va établir la formule :

$$\langle \vec{v} | \vec{\nabla} \rangle (\vec{v}) = \vec{\nabla} \left(\frac{v^2}{2} \right) + (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}) \wedge \vec{v}.$$

En effet, on peut écrire – sachant que le champ scalaire $v^2 = \langle \vec{v} | \vec{v} \rangle$ du carré de la norme euclidienne de la vitesse est un champ de classe C^1 :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \left(\frac{v^2}{2} \right) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^2}{\partial x}, \frac{\partial v^2}{\partial y}, \frac{\partial v^2}{\partial z} \right) \\ &= \left(\left\langle \vec{v} \middle| \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \right\rangle, \left\langle \vec{v} \middle| \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \right\rangle, \left\langle \vec{v} \middle| \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \right\rangle \right). \end{aligned}$$

→ On détaille pour la première composante des vecteurs dans la formule à montrer.

À gauche, la première composante de la composante convective de la dérivée particulière \vec{a} vaut :

$$v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_x}{\partial z}.$$

À droite, la première composante de $\vec{\nabla} \left(\frac{v^2}{2} \right)$ vaut :

$$v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_z \cdot \frac{\partial v_z}{\partial x}.$$

Encore à droite, la première composante de $(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}) \wedge \vec{v}$ vaut :

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \cdot v_z - \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \cdot v_y.$$

Après simplifications des termes, tout va bien.

→ On détaille pour la deuxième composante des vecteurs.

À gauche, on a :

$$v_x \cdot \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_y}{\partial z}.$$

À droite, on a la deuxième composante de $\vec{\nabla} \left(\frac{v^2}{2} \right)$:

$$v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_y \cdot \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_z}{\partial y}.$$

Encore à droite, on a la deuxième composante de $(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}) \wedge \vec{v}$ qui vaut :

$$\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \cdot v_x - \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \cdot v_z.$$

De nouveau, des termes se simplifient pour donner ce qu'il faut.

→ On détaille pour la troisième composante des vecteurs.

À gauche, on a :

$$v_x \cdot \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

À droite, on a la troisième composante de $\vec{\nabla} \left(\frac{v^2}{2} \right)$:

$$v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial z} + v_y \cdot \frac{\partial v_y}{\partial z} + v_z \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Encore à droite, on a la troisième composante de $(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}) \wedge \vec{v}$ qui vaut :

$$\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \cdot v_y - \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \cdot v_x.$$

De nouveau, des termes se simplifient pour donner ce qu'il faut.

4 Théorème d'Euler

4.1 Vocabulaire liée aux hypothèses

On appelle **fluide parfait** ou **non visqueux**, un fluide pour lequel les forces de viscosité sont négligées par rapport aux autres forces mises en jeu.

On appelle **fluide incompressible**, un fluide pour lequel le champ « masse volumique » est constant.

On appelle **écoulement stationnaire**, une situation où le champ vectoriel des vitesses est indépendant du temps.

Dans tout ce qui suit, on considère un fluide parfait et incompressible dans un référentiel galiléen \mathcal{R} .

4.2 Équation de continuité

On considère un élément de fluide élémentaire $d\tau = dx \, dy \, dz$ emprisonné dans le pavé élémentaire

$$[x, x + dx] \times [y, y + dy, z, z + dz].$$

On note ρ la masse volumique du fluide supposée constante dans l'espace et le temps.

Cet élément de volume est supposé soumis à deux forces uniquement :

- le poids :

$$d\vec{F}_1 = \rho \, d\tau \cdot \vec{g},$$

où l'intensité de pesanteur \vec{g} est supposé constant ;

- les forces de pression qui s'appliquent sur les six faces de notre élément de volume :

▷ pour la face inférieure :

$$P(x, y, z, t) \cdot dx \, dy \cdot \vec{e}_3$$

▷ pour la face supérieure :

$$-P(x, y, z + dz, t) \cdot dx \, dy \cdot \vec{e}_3$$

▷ pour la face latérale gauche :

$$P(x, y, z, t) \cdot dy \, dz \cdot \vec{e}_1$$

▷ pour la face latérale droite :

$$-P(x + dx, y, z, t) \cdot dy \, dz \cdot \vec{e}_1$$

▷ pour la face verticale avant

$$P(x, y, z, t) \cdot dx \, dz \cdot \vec{e}_2$$

▷ pour la face verticale arrière :

$$-P(x, y + dy, z, t) \cdot dx \, dz \cdot \vec{e}_2.$$

La somme des forces de pression vaut donc :

$$\begin{aligned} d\vec{F}_2 &= -\frac{\partial P}{\partial x} d\tau \cdot \vec{e}_1 - \frac{\partial P}{\partial y} d\tau \cdot \vec{e}_2 - \frac{\partial P}{\partial z} d\tau \cdot \vec{e}_3 \\ &= -d\tau \cdot \overrightarrow{\text{grad}} P, \end{aligned}$$

où la fonction $P : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ est le champ scalaire des pressions.

La relation fondamentale de la dynamique s'écrit donc entre les instants t et $t + dt$:

$$dm \cdot \frac{D\vec{v}}{Dt} = d\vec{F}_1 + d\vec{F}_2.$$

On en déduit après simplification par $d\tau$ l'équation d'Euler :

$$\rho \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \rho \cdot \overrightarrow{\text{rot}} (\vec{v}) \wedge \vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}} P + \rho \cdot \vec{g}.$$

Cette équation a été établie par le physicien/mathématicien allemand Leonhard Euler en 1757.

4.3 Lignes de courant dans un champ vectoriel et trajectoires

Soit $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ un champ vectoriel, où l'ensemble \mathcal{D} est une partie de l'espace \mathbb{R}^3 .

On appelle **ligne de courant** entre les points M_0 et M_1 dans l'ensemble \mathcal{D} , une fonction $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathcal{D}$ de classe C^1 telle que pour tout réel $a \in [0, 1]$, les vecteurs $\vec{\varphi}'(a)$ et $F(\varphi(a))$ sont colinéaires dans \mathbb{R}^3 , avec de plus $\varphi(0) = M_0$ et $\varphi(1) = M_1$.

On considère un écoulement de particules fluides. On considère une particule M évoluant dans l'espace \mathbb{R}^3 en fonction du temps.

On appelle **trajectoire** de la particule M , la fonction $M : t \mapsto M(t)$ ou encore l'ensemble image $M(I)$, où I désigne l'intervalle des instants t pendant lesquels est prise en compte l'évolution de la particule.

On appelle **écoulement stationnaire**, un écoulement pour lequel le champ vectoriel des vitesses est indépendant du temps. Dans ce cadre, le champ vectoriel des vitesses est un champ de la forme :

$$\vec{v} : \begin{cases} \mathcal{D} & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ a & \mapsto & \vec{v}(a) = (v_x(a), v_y(a), v_z(a)) \end{cases} .$$

Dans un écoulement stationnaire, les trajectoires des particules sont des lignes de champ vectoriel des vitesses.

4.4 Relation de Bernoulli

On remarque qu'en notant (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{R}^3 , puis $\mathcal{B}_c^* = (\vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*, \vec{e}_3^*)$ sa base duale, alors la forme linéaire $G = \vec{e}_3^* : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ peut être vue comme un champ scalaire dont le gradient vérifie :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \overrightarrow{\text{grad}} G(x, y, z) = \vec{e}_3.$$

Ainsi, le gradient du champ scalaire $-\rho g \cdot G$ vaut $\rho \cdot \vec{g}$. Ce champ scalaire se note avec des notations intuitives :

$$-\rho g \cdot G = -\rho g z.$$

Dans le cas stationnaire, le champ vectoriel des vitesses est indépendant du temps :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}.$$

On en déduit l'expression de l'équation d'Euler dans cette situation :

$$\rho \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \rho \cdot \overrightarrow{\text{rot}} (\vec{v}) \wedge \vec{v} + \overrightarrow{\text{grad}} P - \rho \cdot \vec{g} = \vec{0}$$

ou encore :

$$\rho \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \rho \cdot \overrightarrow{\text{rot}} (\vec{v}) \wedge \vec{v} + \overrightarrow{\text{grad}} P - \rho \cdot \vec{g} = \vec{0}$$

ou encore :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left(\rho \frac{v^2}{2} + P + \rho g z \right) + \rho \cdot \overrightarrow{\text{rot}} (\vec{v}) \wedge \vec{v} = \vec{0} \quad (\star)$$

On considère maintenant une ligne de champ entre deux points M_0 et M_1 du champ vectoriel des vitesses. Soit $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ une fonction ligne de champ de classe C^1 telle que :

$$\begin{cases} \varphi(0) = M_0 \\ \varphi(1) = M_1 \end{cases} \quad \text{et pour tout } a \in [0, 1], \text{ les vecteurs } \vec{\varphi}'(a) \text{ et } \vec{v}(\varphi(a)) \text{ sont colinéaires.}$$

Soit a un réel dans l'intervalle $[0, 1]$.

On applique l'égalité (\star) en le point $\varphi(a)$, ce qui donne :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left(\rho \frac{v^2(\varphi(a))}{2} + P(\varphi(a)) + \rho g \vec{e}_3^*(\varphi(a)) \right) + \rho \cdot \overrightarrow{\text{rot}} (\vec{v})(\varphi(a)) \wedge \vec{v}(\varphi(a)) = \vec{0}.$$

On effectue maintenant le produit scalaire avec le vecteur $\vec{\varphi}'(a)$. Ce vecteur est colinéaire au vecteur vitesse $\vec{v}(\varphi(a))$: la famille $\mathcal{F} = (\overrightarrow{\text{rot}} (\vec{v})(\varphi(a)), \vec{v}(\varphi(a)), \vec{\varphi}'(a))$ est une famille liée : le déterminant de cette famille selon la base canonique est nul et ce déterminant vaut :

$$\left\langle \overrightarrow{\text{rot}} (\vec{v})(\varphi(a)) \wedge \vec{v}(\varphi(a)) \mid \vec{\varphi}'(a) \right\rangle = \det_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{F}) = 0.$$

Par conséquent :

$$\left\langle \overrightarrow{\text{grad}} \left(\rho \frac{v^2(\varphi(a))}{2} + P(\varphi(a)) + \rho g \vec{e}_3^*(\varphi(a)) \right) \mid \vec{\varphi}'(a) \right\rangle = 0.$$

La fonction

$$\Psi : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ a & \longmapsto \rho \frac{v^2(\varphi(a))}{2} + P(\varphi(a)) + \rho g \vec{e}_3^*(\varphi(a)) \end{cases}$$

est dérivable, de dérivée :

$$\Psi' : a \longmapsto \left\langle \overrightarrow{\text{grad}} \left(\rho \frac{v^2(\varphi(a))}{2} + P(\varphi(a)) + \rho g \vec{e}_3^*(\varphi(a)) \right) \mid \vec{\varphi}'(a) \right\rangle = 0.$$

La fonction Ψ est donc constante sur l'intervalle $[0, 1]$ conduisant à :

$$\Psi(0) = \Psi(1).$$

Or, $\varphi(0) = M_0$ et $\varphi(1) = M_1$, impliquant :

$$\rho \frac{v^2(M_0)}{2} + P(M_0) + \rho g z_{M_0} = \rho \frac{v^2(M_1)}{2} + P(M_1) + \rho g z_{M_1}.$$

On en déduit la relation de Bernoulli établie en 1738 par le physicien suisse Daniel Bernoulli indiquant une conservation de l'énergie le long de toute ligne de courant dans le champ stationnaire des vitesses :

$$\rho \frac{v^2}{2} + P + \rho g z = C.$$

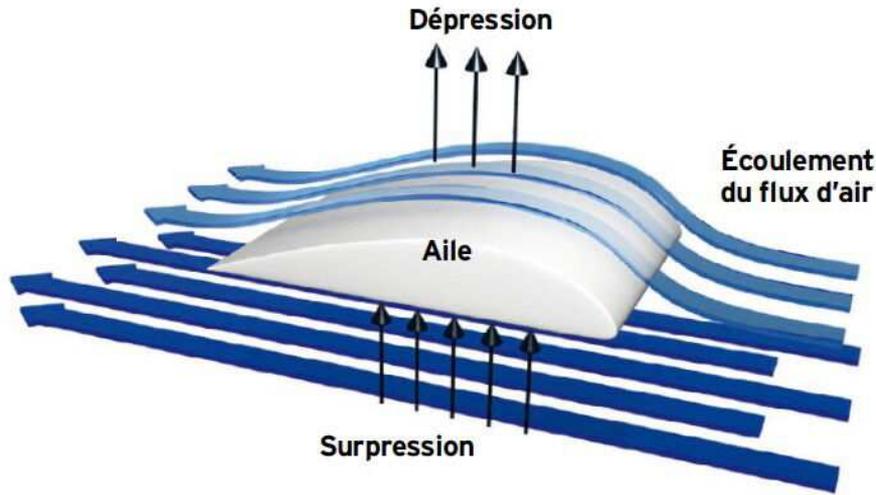
Il est à noter que Daniel Bernoulli est le neveu de Jacques Bernoulli, auteur de la loi de probabilité $\mathcal{B}(p)$ portant son nom.



4.5 Une application aéronautique de la relation de Bernoulli

4.5.1 Profil d'aile d'avion

Le profil d'une aile d'avion présente une partie inférieure relativement plate appelée l'**intrados** et une partie supérieure bombée appelée l'**extrados**.



On se place dans la situation où l'avion est en vitesse de croisière, le champ des vitesses étant stationnaire autour de l'avion.

On considère deux lignes de courant \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 proches l'une de l'autre, de part et d'autre du bord d'attaque du profil d'aile. L'indice 1 concerne l'intrados et l'indice 2 concerne l'extrados dans les quantités qui suivent.

Le long de chaque ligne de courant \mathcal{C}_i , la quantité

$$\rho \frac{v^2}{2} + P + \rho g z$$

est constante égale à C_i .

Ces constantes C_i sont des fonctions continues en les données. Comme en amont ou en aval de la traversée de l'aile dans le flux d'air, les lignes de courant se rejoignent presque, ces deux constantes C_1 et C_2 sont sensiblement égales. On en déduit le long des deux lignes de courant :

$$\rho \frac{v_1^2}{2} + P_1 + \rho g z_1 = \rho \frac{v_2^2}{2} + P_2 + \rho g z_2.$$

Les altitudes z_1 et z_2 le long des deux lignes de courant sont sensiblement identiques. Ainsi,

$$P_1 - P_2 = \rho \frac{v_2^2 - v_1^2}{2}.$$

Le profil de l'aile impose que la longueur de l'extrados ℓ_2 du bord d'attaque au bord de fuite par le côté supérieur est plus grande que la longueur de l'intrados ℓ_1 du bord d'attaque au bord de fuite par le côté inférieur. Les temps Δt de parcours le long de ces deux lignes de courant entre le bord d'attaque et le bord de fuite sont identiques :

$$\Delta t = \frac{\ell_1}{v_1} = \frac{\ell_2}{v_2},$$

en considérant les vitesses v_i pratiquement constantes le long des lignes de courant, puisque la durée Δt est courte. Ainsi,

$$v_2 = v_1 \cdot \frac{\ell_2}{\ell_1}.$$

On pose le quotient

$$\lambda = \frac{\ell_2}{\ell_1} > 1$$

qui dépend de la forme du profil de l'aile.

Ainsi,

$$P_1 - P_2 = \rho \frac{v_1^2}{2} \times (\lambda^2 - 1).$$

La pression autour du profil d'aile exerce des forces de pression selon la formule :

$$d\vec{F} = P \cdot d\vec{S}.$$

On considère que la pression est exercée sur la totalité de la surface alaire S , impliquant une résultante verticale vers le haut :

$$\vec{F}_1 = P_1 \cdot S \cdot \vec{e}_3$$

et une autre résultante verticale vers le bas :

$$\vec{F}_2 = -P_2 \cdot S \cdot \vec{e}_3.$$

La résultante des forces de pression est donc :

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (P_1 - P_2) \cdot S \cdot \vec{e}_3 \\ &= \rho S \frac{v_1^2}{2} \times (\lambda^2 - 1) \cdot \vec{e}_3.\end{aligned}$$

Le profil de l'intrados étant pratiquement horizontal, la vitesse v_1 est pratiquement égale à la vitesse de l'avion dans le référentiel terrestre. La vitesse d'écoulement du fluide autour de l'aile est égale à la vitesse de l'avion dans le référentiel terrestre, l'air étant supposé immobile dans le référentiel terrestre.

On note le **coefficient de portance** :

$$C_z = \lambda^2 - 1.$$

On obtient alors la formule de portance :

$$F = \rho S C_z \frac{v^2}{2}, \text{ où}$$

- ρ est la masse volumique du fluide – ici l'air atmosphérique – mesurée en $kg \cdot m^{-3}$
- S est la surface alaire soumise à la pression mesurée en m^2
- v est la vitesse de l'avion mesurée en $m \cdot s^{-1}$ ou encore la vitesse d'écoulement de l'air autour de l'aile
- C_z est le coefficient de portance sans dimension.

En guise d'application numérique, on considère l'Airbus A-380 en vol de croisière.

Voici les données numériques pour cette situation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \simeq 0.525 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \text{ pour l'air à } 8000 \text{ m d'altitude} \\ S \simeq 845 \text{ m}^2 \\ v \simeq 925 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} \simeq 257 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ C_z \simeq 0.4450 \text{ pour un angle d'attaque de } 0^\circ \end{array} \right.$$

On en déduit l'intensité de la force de portance :

$$F \simeq 6519469 \text{ N}.$$

Dans le champ de pesanteur considéré comme uniforme où l'intensité de pesanteur vaut :

$$g \simeq 9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

la force de portance est associée au poids d'une masse égale à :

$$m = \frac{F}{g} \simeq 664573 \text{ kg}.$$

La masse maximale de l'Airbus A-380 est d'environ 576 tonnes.

On voit que la force de portance est en mesure de contrer le poids.

Les recherches actuelles en aéronautique tendent à optimiser le facteur C_x de traînée de l'avion, afin de gagner en énergie, notamment en carburant.



Il y a encore plein de choses à expliquer, notamment les phénomènes de turbulences marginales de sillage :

