

Chapitre 8 : Développements limités et asymptotiques

Table des matières

1	<i>Notions préliminaires</i>	2
1.1	Voisinages	2
1.2	Parties ouvertes ou fermées	2
1.3	Relations de comparaison	2
1.4	Polynômes tronqués	3
2	<i>Développements limités : étude théorique</i>	3
2.1	Définitions	3
2.2	Formule de Taylor–Young	4
2.3	Développements limités usuels	4
3	<i>Applications des développements limités</i>	5
3.1	Savoir manipuler des <i>DL</i>	5
3.2	Calculs de limites	6
3.3	<i>DL</i> d'une fonction réciproque	6
3.4	Déterminer la position d'une courbe par rapport à une autre	7
3.5	Obtenir des développements asymptotiques dans l'étude de suites	7
3.5.1	Étude d'une suite implicite	7
3.5.2	Étude d'une suite récurrente	7

1 Notions préliminaires

1.1 Voisinages

Définition 1 Soit $a \in \mathbb{R}$. On dit qu'une partie \mathcal{V} de \mathbb{R} est un **voisinage de a** s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\subset \mathcal{V}.$$

On dit qu'une partie \mathcal{V} de \mathbb{R} est un **voisinage de $+\infty$** (resp de $-\infty$) si \mathcal{V} contient un intervalle de la forme $[\xi, +\infty[$ (resp. de la forme $] - \infty, \xi]$).

1.2 Parties ouvertes ou fermées

Définition 2 Soit A une partie de \mathbb{R} .

On dit que la partie A est **ouverte** si, pour tout $a \in A$, l'ensemble A est un voisinage de l'élément a . Autrement dit, l'ensemble A est ouvert si et seulement si :

$$\forall a \in A, \exists r > 0,]a - r, a + r[\subset A.$$

On dit que la partie A est **fermée** si l'adhérence de A est égale à A .

Autrement dit, l'ensemble A est fermé si et seulement si pour toute suite $u \in A^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans A convergente de limite ℓ , alors la limite ℓ appartient à A .

Exemple 1 • Les intervalles ouverts de \mathbb{R} sont ceux de la forme $]a, b[$, avec $a < b$, les extrémités valant éventuellement $\pm\infty$.

- Les intervalles fermés de \mathbb{R} sont ceux de la forme $] - \infty, b]$, $[a, +\infty[$, $[a, b]$ ou $] - \infty, +\infty[$, avec a et b dans \mathbb{R} .
- Les seules parties de \mathbb{R} qui sont à la fois ouvertes et fermées sont \mathbb{R} et \emptyset .

Exemple 2 • Soit A une partie de \mathbb{R} . Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- la partie A est ouverte
- le complémentaire $\mathbb{R} \setminus A$ est fermé.

• La réunion quelconque d'ensembles ouverts est un ouvert. L'intersection quelconque d'ensembles fermés est fermée.

- L'intersection finie d'ensembles ouverts est ouverte. La réunion finie d'ensembles fermés reste fermée.

L'intersection quelconque d'ensembles ouverts n'est pas toujours ouverte. La réunion quelconque d'ensembles fermés n'est pas toujours fermée.

- Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- la fonction f est continue sur \mathbb{R}
- pour toute partie ouverte A de \mathbb{R} , alors l'ensemble $f^{-1}(A)$ est ouvert
- pour toute partie fermée B de \mathbb{R} , alors l'ensemble $f^{-1}(B)$ est fermé.

1.3 Relations de comparaison

Définition 3 Soit $a \in \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ (a est soit un nombre réel, soit égal à $+\infty$, soit égal à $-\infty$). Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage \mathcal{V} de a . On suppose que : $\forall x \in \mathcal{V} \setminus \{a\}, g(x) \neq 0$.

On définit les trois relations de comparaison suivantes :

- on dit que la fonction f est **dominée** par la fonction g au voisinage de a et on note $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$, au voisinage de a , si la fonction $\frac{f}{g}$ est bornée sur $\mathcal{V} \setminus \{a\}$
- on dit que la fonction f est **négligeable** devant la fonction g au voisinage de a et on note $f(x) = \circ(g(x))$, au voisinage de a , si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

- on dit que la fonction f est *équivalente* à la fonction g au voisinage de a et on note $f(x) \sim g(x)$, au voisinage de a , si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Proposition 1 Avec les notations déjà introduites,

- $f(x) \sim g(x)$ au voisinage de a si et seulement si $f(x) - g(x) = o(g(x))$ au voisinage de a
- si $f(x) = o(g(x))$ et $g(x) = o(h(x))$ au voisinage de a , alors $f(x) = o(h(x))$ au voisinage de a
- $x^q = o(x^p)$ au voisinage de 0 si et seulement si $p < q$.

1.4 Polynômes tronqués

Définition 4 Soient $P(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot X^n$ un polynôme à coefficients dans \mathbb{R} et $q \in \mathbb{N}$.

On appelle *polynôme tronqué à q* et on note $P(X)|_q$ le polynôme : $P(X)|_q = \sum_{n=0}^q a_n \cdot X^n$.

2 Développements limités : étude théorique

2.1 Définitions

Définition 5 Soit $a \in \mathbb{R}$. Soient $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un voisinage \mathcal{V} de a et $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un *développement limité à l'ordre n en a* et on note : f a un $DL_n(a)$, s'il existe un polynôme $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n tel que :

$$f(a+h) = P(h) + o(h^n) \quad \text{au voisinage de 0 en } h..$$

Proposition 2 Si f a un $DL_n(a)$, alors le polynôme $P(X)$ de degré inférieur ou égal à n est unique. On l'appelle la *partie polynomiale* du développement limité et on le note $T_n f(X)$.

Proposition 3 Si f a un $DL_n(a)$, alors pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, f a un $DL_k(a)$ et : $T_k f(X) = (T_n f(X))|_k$.

Proposition 4 • La fonction f admet un $DL_0(a)$ si et seulement si la fonction f est continue en a . Dans ce cas, le $DL_0(a)$ est : $f(a+h) = f(a) + o(1)$.

• La fonction f admet un $DL_1(a)$ si et seulement si la fonction f est dérivable en a . Dans ce cas, le $DL_1(a)$ est : $f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + o(h)$.

- Lorsque cela a un sens, si f et g sont définies au voisinage de 0, si λ est un réel :

$$T_n(f+g) = T_n(f) + T_n(g), \quad T_n(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot T_n(f) \quad \text{et} \quad T_n(f \times g) = (T_n(f) \times T_n(g))|_n.$$

Remarque 1 • Si la fonction f admet un $DL_n(a)$ avec $n \geq 2$, cela ne veut pas dire que f soit n -fois dérivable en a

comme le témoigne l'exemple : $f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } x = 0 \\ x^3 \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & , \text{ si } x \neq 0 \end{cases}$.

La fonction f n'est pas deux fois dérivable en 0 et pourtant elle admet un $DL_2(0)$, à savoir : $f(h) = o(h^2)$, de partie polynomiale nulle.

- Si $f(x) = o(x^p)$ au voisinage de 0, a-t-on $o(x^p) = f(x)$ au voisinage de 0 ?

2.2 Formule de Taylor-Young

Théorème 1 Soit $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n . Alors, la fonction f admet un $DL_n(a)$ et :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \frac{f''(a)}{2!} \cdot h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot h^n + o(h^n).$$

Exemple 3 • Déterminer le $DL_4(0)$ de arcsin.

- Déterminer le $DL_3(1)$ de $\ln\left(\frac{2+x}{3-x+x^2}\right)$.

2.3 Développements limités usuels

Méthode : Quels $D.L_n(0)$ retenir ?

Voici la liste des $DL(0)$ à connaître ou à savoir retrouver :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha \cdot x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!} \cdot x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \dots + (-1)^n \cdot x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^{(n-1)} \cdot \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

Remarque 2 Peuvent se déduire directement des formules précédentes :

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + \dots + u^n + o(u^n) \text{ et } \ln(1-u) = -u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} - \dots - \frac{u^n}{n} + o(u^n)$$

3 Applications des développements limités

3.1 Savoir manipuler des DL

Méthode : Comment calculer un DL ?

Pour calculer un $DL_n(x_0)$ de $f(x)$:

- ▶ se ramener à un DL(0) en posant $h = x - x_0$
- ▶ effectuer le $DL_n(0)$ de $f(x_0 + h)$ en fonction de h .

Pour calculer un $DL_n(0)$ dans une somme $f(x) + g(x)$ ou un produit $f(x) \cdot g(x)$:

- ▶ effectuer les $DL_n(0)$ de $f(x)$ et $g(x)$
- ▶ faire la somme ou le produit des parties polynomiales
- ▶ laisser tomber tous les termes en x^{n+1} , x^{n+2} , etc.

Pour calculer un $DL_n(0)$ dans un quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$:

- ▶ effectuer les $DL_n(0)$ de $f(x)$ et $g(x)$
- ▶ au dénominateur, factoriser par le terme prépondérant, pour obtenir une expression de la forme $1 + \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \rightarrow 0$
- ▶ utiliser le $DL_n(0)$: $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + \dots + (-1)^n u^n + o(u^n)$ en remplaçant chaque u par $\varepsilon(x)$
- ▶ laisser tomber chaque terme en x^p , avec $p > n$: on obtient le $DL_n(0)$ de $\frac{1}{g(x)}$
- ▶ effectuer le $DL_n(0)$ du produit $f(x) \times \frac{1}{g(x)}$.

Exemple 4 • Déterminer le $DL_6(0)$ de argsh .

- Déterminer le $DL_4(1)$ de $\ln\left(\frac{2+x}{3-x+x^2}\right)$.

Exemple 5 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction admettant des développements limités à tout ordre en 0, où I est un voisinage de 0.

1. Montrer que si la fonction f est paire (resp. impaire), alors tous les termes de puissances impaires (resp. puissances paires) sont nuls dans les $DL(0)$ de la fonction f .

2. La réciproque est-elle vraie? On pourra considérer la fonction f :

$$\begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0 \\ \exp\left(-\frac{1}{x}\right), & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{cases} .$$

Exemple 6 Déterminer les développements limités suivants :

- $DL_5(0)$ de $x \mapsto \ln(1 - x + 2x^2)$;
- $DL_4\left(\frac{\pi}{3}\right)$ de $x \mapsto \exp(\cos x)$;
- $DL_3(1)$ de $t \mapsto \frac{1+t^2}{3-t+t^3}$;
- $DL_6(0)$ de $t \mapsto (\cos t)^{\sin(t^2+t^3) \cdot \ln(2+t)}$.

Méthode : Comment trouver un DL par intégration ?

Pour obtenir un $DL_n(a)$ de $f(x)$ par intégration :

- ▶ se ramener à un $DL_n(0)$ en posant $h = x - a$
- ▶ poser $g(h) = f(a + h)$
- ▶ calculer le $DL_{n-1}(0)$ de $g'(h)$
- ▶ intégrer terme à terme entre 0 et h : on a le $DL_n(0)$ de $g(h)$.

Exemple 7 Déterminer les DL suivants :

- $DL_n(0)$ de arcsin et arccos ;
- $DL_{10}(0)$ de $x \mapsto \tan x$;
- $DL_4(+\infty)$ de $x \mapsto \cos(2 \arctan x) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$;
- $DL_2(0)$ de $x \mapsto \ln \left(\operatorname{ch} x + \frac{\cos x}{2 + \sin x} \right)$

3.2 Calculs de limites

Méthode : Comment lever une forme indéterminée de la forme « $\frac{0}{0}$ » ?

On veut calculer $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ une telle forme indéterminée. Pour la lever :

- ▶ poser $h = x - a$
- ▶ faire un $DL_1(0)$ de $f(a + h)$ et $g(a + h)$
- ▶ procéder à d'éventuelles simplifications pour aboutir à une forme déterminée
- ▶ si cela ne donne rien, passer à l'ordre supérieur.

Exemple 8 • Si $z \in \mathbb{C}$, calculer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$.

- Calculer : $\lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{(8 \cos^2 x - 2 \cos x - 1)^2}{e^{4x^2} - e^{4\pi^2/9}}$.
- Si $\alpha > 0$, calculer la limite éventuelle de $\frac{\operatorname{sh}(\sin(t)) - \sin(\operatorname{sh}(t))}{t^\alpha}$, lorsque t tend vers 0.

3.3 DL d'une fonction réciproque

Méthode : Comment traiter une fonction réciproque localement ?

Soit f une fonction de classe C^1 définie au voisinage de a .

Pour savoir si f réalise localement une bijection en a :

- ▶ montrer que $f'(a) \neq 0$
- ▶ la fonction f réalise alors une bijection d'un voisinage de a vers un voisinage de $f(a)$ et localement en $f(a)$, la fonction f^{-1} est dérivable.

Pour calculer un $DL_n(f(a))$ de f^{-1} :

- ▶ calculer le $DL_n(0)$ de $f(a + H)$
- ▶ poser $f^{-1}(f(a) + h) = a + \alpha_1 h + \dots + \alpha_n h^n + o(h^n)$
- ▶ utiliser éventuellement les symétries de f : si f est impaire par exemple, f^{-1} également et les termes d'indices pairs sont nuls
- ▶ utiliser la formule : $f^{-1}(f(a + H)) = a + H$:
 - poser dans le $DL_n(0)$ de $f^{-1}(f(a) + h)$, $h = f(a + H) - f(a)$
 - identifier les termes dans les deux $DL_n(0)$
 - obtenir directement α_1 , puis α_2 , etc.

Exemple 9 • Calculer le $DL_4(0)$ de arcsin, par dérivation et par fonction réciproque.

- Montrer que la fonction $f : x \mapsto x^2 + \operatorname{sh}x$ réalise une bijection C^∞ en 0 et faire le $DL_3(0)$ de f^{-1} .

3.4 Déterminer la position d'une courbe par rapport à une autre

Méthode : Comment étudier une branche infinie ?

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$. Pour étudier sa branche infinie :

- ▶ simplifier $\frac{f(x)}{x}$
- ▶ commencer le DL($+\infty$) dans cette expression, en posant $h = \frac{1}{x}$
- ▶ le terme constant a_0 indique la direction asymptotique, le terme de $a_1 \cdot h$ indique l'asymptote et le terme suivant non nul indique la position courbe / asymptote.

Exemple 10 • Étudier les branches infinies de la fonction $x \mapsto \sqrt[4]{2x^4 + 3x^3 - x^2 + x + 4}$.

- Étudier les branches infinies de la fonction $x \mapsto (x + 5) \cdot \exp\left(\frac{2x}{x^2 - 1}\right)$.

Méthode : Comment étudier localement la position relative entre deux courbes ?

Soient f et g , deux fonctions définies localement en un point a . Pour étudier la position relative de la courbe $y = f(x)$ par rapport à la courbe $y = g(x)$ localement en a :

- ▶ poser la différence $\varphi = f - g$
- ▶ commencer le $DL(a)$ de la fonction φ pour obtenir un premier indice $k \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\varphi(a + h) = \alpha \cdot h^k + o(h^k), \text{ où } \alpha \text{ est non nul}$$

- ▶ discuter alors selon le signe de α , la parité de l'entier k et la position de h par rapport à 0.

Exemple 11 Étudier la position de la courbe $y = \ln(2 + \cos x)$ par rapport à sa tangente localement au point $x = \frac{2\pi}{3}$.

3.5 Obtenir des développements asymptotiques dans l'étude de suites

3.5.1 Étude d'une suite implicite

Exemple 12

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\tan x = \frac{1}{x}$ admet une seule solution dans l'intervalle $I_n = \left] -\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi \right[$. On la note u_n .
2. Déterminer un développement asymptotique de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ à trois termes significatifs.

3.5.2 Étude d'une suite récurrente

Exemple 13

On définit la suite v par :

$$v_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \operatorname{argsh}(v_n).$$

1. Étudier la suite v .
2. Déterminer $\alpha > 0$ et $\ell \neq 0$ tels que la suite $\left(w_n = \frac{1}{v_{n+1}^\alpha} - \frac{1}{v_n^\alpha}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ soit convergente de limite ℓ .
3. Déterminer un équivalent de v_n , lorsque n tend vers $+\infty$.