# Chapitre 7 : Fonctions continues et dérivables Convexité

## Table des matières

# 1 Premières notions

## 1.1 Intervalles de $\mathbb{R}$

**Définition 1** Soit $A$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. On dit que $A$ est un ***intervalle*** si :

$$\forall (x,y) \in A^2, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad x < \alpha < y \Longrightarrow \alpha \in A.$$

**Exemple 1** Il existe plusieurs types d'intervalles :
- les ***segments*** ou les intervalles fermés : $[a,b]$, où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$
- les intervalles ***semi-ouverts*** : $[a,b[$, $]a,b]$, $[a,+\infty[$ ou $]-\infty,b]$
- les intervalles ***ouverts*** : $]a,b[$, $]a,+\infty[$, $]-\infty,b[$ ou $\mathbb{R} = ]-\infty,+\infty[$

**Exemple 2** Soit $A$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall (a,b) \in A^2, \ \frac{a+b}{2} \in A.$$

1. L'ensemble $A$ est-il un intervalle ?
2. L'ensemble $A$ est-il dense dans $\Big]\inf A, \sup A\Big[$ ?

## 1.2 Point adhérent à une partie

**Définition 2** Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}$, puis $a$ un nombre réel. On dit que $a$ est un ***point adhérent à*** $A$ si pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[ \cap A$ est non vide.
Autrement dit, le point $a$ est adhérent à $A$ si et seulement si il existe une suite $u$ d'éléments dans $A$ telle que :

$$a = \lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n.$$

**Exemple 3** • Si $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, quels sont les points adhérents à $I$ ?
• Si $A = \left\{ \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n \ ; \ n \in \mathbb{N}^* \right\}$, quels sont les points adhérents à $A$ ?
• Soient $A$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.
On a équivalence entre les deux points suivants :
- le nombre $a$ est la borne inférieure (respectivement supérieure) de $A$
- le nombre $a$ minore (respectivement majore) $A$ et le point $a$ est adhérent à $A$.

## 1.3 Limites et continuité

**Définition 3** Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle, $x_0$ un point adhérent à $I$, puis $\ell \in \mathbb{R}$.
On dit que $f(x)$ ***tend vers*** $\ell$ ***quand*** $x$ ***tend vers*** $x_0$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \ \forall x \in I, \ |x - x_0| \leqslant \alpha \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

**Proposition 1** Lorsqu'il existe, le nombre $\ell$ est unique et est appelé la ***limite de la fonction $f$ en $x_0$***. Celle-ci est notée $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x)$.

**Définition 4** Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in I$. On dit que la fonction $f$ est continue en $x_0$ si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ (autrement dit : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$, $\forall x \in I$, $|x - x_0| \leqslant \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$).
On dit que la fonction $f$ est ***continue*** si elle est continue en tout point $x_0$ de $I$ (autrement dit : $\forall x \in I$, $\lim\limits_{\xi \longrightarrow x} f(\xi) = f(x)$).

**Remarque 1** • On parle également de limite à droite (resp. à gauche), de continuité à droite (resp. à gauche) en remplaçant dans les définitions précédentes la condition $|x - x_0| \leqslant \alpha$ par $\Big(|x-x_0| \leqslant \alpha$ et $x > x_0\Big)$ (resp. $\Big(|x - x_0| \leqslant \alpha$ et $x < x_0\Big)$. On adopte les notations suivantes pour désigner les limites à droite et à gauche : $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0^-} f(x)$.

• On parle également de limites en $\pm + \infty$ et on note par exemple $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \ell$, lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists x_0 \in \mathbb{R}, \quad \forall x \geqslant x_0, \quad |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

• On parle enfin de limites égales à $\pm\infty$ et on note par exemple $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = +\infty$, lorsque :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in I, \quad |x - x_0| \leqslant \alpha \Longrightarrow f(x) \geqslant M.$$

**Exemple 4** Comment traduire avec les quantificateurs le fait que :
- $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ?
- $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = +\infty$ ?

**Exemple 5** La fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$ définie par $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}} : \left| \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \{0, 1\} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1, \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0, \text{ sinon} \end{cases} \end{array} \right.$ est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$. Les fonctions usuelles sont continues sur leur domaine de définition.

## 1.4 Fonctions et inégalités

**Définition 5** Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle.

• On dit que $f$ est ***minorée*** si $\exists m \in \mathbb{R}$, $\forall x \in I$, $m \leqslant f(x)$. L'ensemble $f(I)$ est dans ce cas non vide, minoré et inclus dans $\mathbb{R}$ et admet par conséquent une borne inférieure. On la note alors : $\inf\limits_{x \in I} f(x) = \inf f(I)$. Si l'ensemble $f(I)$ admet un plus petit élément, on note $\min\limits_{x \in I} f(x)$ ce plus petit élement : c'est le minimum de la fonction $f$ sur l'intervalle $I$.

• On dit que $f$ est ***majorée*** si $\exists M \in \mathbb{R}$, $\forall x \in I$, $f(x) \leqslant M$. L'ensemble $f(I)$ est dans ce cas non vide, majoré et inclus dans $\mathbb{R}$ et admet par conséquent une borne supérieure. On la note alors : $\sup\limits_{x \in I} f(x) = \sup f(I)$. Si l'ensemble $f(I)$ admet un plus grand élément, on note $\max\limits_{x \in I} f(x)$ ce plus grand élement : c'est le maximum de la fonction $f$ sur l'intervalle $I$.

• On dit que $f$ est ***bornée*** si $\exists M \geqslant 0$, $\forall x \in I$, $|f(x)| \leqslant M$. Dans ce cas, la fonction $f$ est bornée par $M$. Une fonction est bornée si et seulement si elle est à la fois minorée et majorée.

• On dit que $f$ est une fonction ***croissante*** (resp. ***décroissante***) si $\forall (x, y) \in I^2$, $x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$ (resp. $x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \geqslant f(y)$). On parle alors de fonction ***monotone*** pour désigner une fonction soit tout le temps croissante, soit tout le temps décroissante.

• On dit que $f$ est une fonction ***strictement croissante*** (resp. ***strictement décroissante***) si $\forall (x,y) \in I^2$, $x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$ (resp. $x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)$). On parle alors de fonction ***strictement monotone*** pour désigner une fonction soit partout sur $I$ strictement croissante, soit partout sur $I$ strictement décroissante.

**Exemple 6** • La fonction $f = \arctan$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \dfrac{\pi}{2}$. En fait $f(\mathbb{R}) = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

• La fonction $f = \sin$ est continue, n'est pas monotone et le minimum de la fonction $f$ qui vaut $-1$ est atteint en tous les points de l'ensemble $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$.

• La fonction ***partie entière*** notée $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ ou bien $x \longmapsto E(x)$, qui à tout nombre réel $x$ associe le plus grand entier inférieur ou égal à $x$ (le nombre $\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier vérifiant $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$) est croissante mais non strictement croissante, elle est continue à droite et discontinue en tout point de $\mathbb{Z}$.

**Exemple 7** • Quelle est la partie entière du nombre $0,999999\cdots$? Quelles sont les limites à gauche et à droite de la fonction $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ en ce point ?
• Montrer que pour tout réel $x$, on a $\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$. En déduire que pour tout réel $x$ et tout entier $p$, $\lfloor x+p \rfloor = \lfloor x \rfloor + p$.

## 1.5 Caractérisation séquentielle de la limite ou de la continuité

**Proposition 2** Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.
Soit $a$ un point adhérent à $I$, le point $a$ pouvant éventuellement être égal à $\pm\infty$.

• Soit $\ell$ un nombre réel ou $\ell = \pm\infty$. Alors, on a équivalence entre les deux assertions suivantes :
$\longrightarrow$ $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = \ell$
$\longrightarrow$ pour toute suite $u \in I^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $I$ telle que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = a$, alors $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f(u_n) = \ell$.

• On a équivalence entre les deux assertions suivantes :
$\longrightarrow$ la fonction $f$ est continue en $a \in I$
$\longrightarrow$ pour toute suite $u \in I^{\mathbb{N}}$ convergente de limite $a$, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge de limite $f(a)$.

**Exemple 8** Déterminer toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \text{[équation fonctionnelle]}$$

## 1.6 Opérations sur les limites

**Proposition 3** • La somme, la multiplication, la composée de deux fonctions continues l'est encore.
• La fonction réciproque d'une fonction bijective continue est encore continue.

# 2 Théorèmes fondamentaux de la continuité

## 2.1 Théorème des valeurs intermédiaires

**Théorème 1** Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle $I$. Alors l'ensemble image $f(I)$ est encore un intervalle.
Un autre énoncé équivalent est :
« si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur un intervalle, si $\alpha = f(a) < \beta = f(b)$ sont deux valeurs prises par la fonction $f$, alors pour tout $\gamma \in [\alpha, \beta]$, il existe $c$ entre $a$ et $b$ tel que $f(c) = \gamma$. »

**Méthode : Comment utiliser le théorème des valeurs intermédiaires ?**
Ce théorème sert surtout à fournir l'existence de solutions à des équations :

- ▶ pour connaître le nombre de solutions à l'équation $f(x) = g(x)$ :
  - mettre les $x$ d'un seul bord
  - faire l'étude de la fonction $h = f - g$ par exemple
- ▶ pour avoir des informations sur une valeur d'annulation d'une fonction continue $f$
  - calculer $f(a)$ et $f(b)$
  - constater que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires
  - conclure que l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution entre $a$ et $b$.
- ▶ pour connaître le signe d'une expression en fonction de $x$, utiliser le résultat suivant :
  - une fonction continue qui ne s'annule pas sur un intervalle garde un signe constant.

**Exemple 9** • Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ une fonction continue. Que peut-on dire de la fonction $f$ ?
• Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une bijection continue sur un intervalle. Alors la fonction $f$ est strictement monotone sur l'intervalle $I$.
• Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction monotone, alors on a équivalence entre les deux points suivants :
$\longrightarrow$ la fonction $f$ est continue
$\longrightarrow$ l'ensemble $f([a, b])$ est un intervalle.

## 2.2 Théorème des bornes atteintes

**Théorème 2** Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur le segment $[a, b]$. Alors, l'ensemble image $f([a, b])$ est encore un segment.

**Méthode : Comment utiliser le théorème des bornes atteintes ?**
Sa principale utilisation est :

- ▶ une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

**Exemple 10** • Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que la fonction $f$ tend vers $+\infty$ en $\pm\infty$. Montrer que la fonction $f$ admet un minimum global.
• Montrer que toute fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

## 2.3 Théorème d'encadrement ou théorème des gendarmes

**Théorème 3** Soient $f$, $g$ et $h$ trois fonctions définies sur un même intervalle $I$ et $a$ un point adhérent à $I$ tels que :

- pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$
- $\exists \ell \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow a} h(x) = \ell$.

Alors, $g(x)$ tend vers $\ell$ quand $x$ tend vers $a$.

**Proposition 4** Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur un intervalle $I$ telles que $f \leqslant g$ (c'est-à-dire : $\forall x \in I$, $f(x) \leqslant g(x)$). Soit $a$ un point adhérent à $I$,$a$ pouvant éventuellement être égal à $\pm\infty$.

- Si $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow a} g(x) = \ell'$, alors $\ell \leqslant \ell'$.
- Si $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow a} g(x) = +\infty$
- Si $\lim\limits_{x \longrightarrow a} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = -\infty$.

### 2.4 Théorème des fonctions monotones

**Théorème 4** Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante sur un intervalle $I = (a, b)$ (les extrémités $a$ et $b$ de l'intervalle $I$ peuvent on non appartenir à l'ensemble $I$).

- Si la fonction $f$ est majorée sur $I$, alors la limite $\lim\limits_{x \longrightarrow b^-} f(x)$ existe et est finie.
- Si la fonction $f$ n'est pas majorée sur $I$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow b^-} f(x) = +\infty$.
- Si la fonction $f$ est minorée sur $I$, alors la limite $\lim\limits_{x \longrightarrow a^+} f(x)$ existe et est finie.
- Si la fonction $f$ n'est pas minorée sur $I$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow a^+} f(x) = -\infty$.

**Remarque 2** On dispose d'un résultat analogue pour les fonctions décroissantes.

## 3 Uniforme continuité

### 3.1 Définition

**Définition 6** Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle $I$. On dit que la fonction $f$ est ***uniformément continue sur*** $I$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall (x, x') \in I^2, \quad |x - x'| \leqslant \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(x')| \leqslant \varepsilon.$$

**Remarque 3** La différence majeure avec la définition de la continuité de $f$ est que le nombre $\alpha$ est ici indépendant du $x \in I$. Par conséquent, toute fonction uniformément continue sur $I$ est continue sur $I$.

**Exemple 11** • Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est uniformément continue si et seulement si pour toutes suites réelles $u$ et $v$,

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0 \Longrightarrow \lim_{n \longrightarrow +\infty} (f(u_n) - f(v_n)) = 0.$$

- Les fonctions $x \longmapsto x^2$ et $x \longmapsto \sin(x^3)$ sont continues sur $\mathbb{R}$. Sont-elles uniformément continues ?

### 3.2 Théorème de Heine

**Proposition 5** Toute fonction continue sur un segment est uniformément continue.

### 3.3 Fonctions lipschitziennes

**Définition 7** Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle $I$. On dit que la fonction $f$ est ***lipschitzienne*** s'il existe $k > 0$ tel que :

$$\forall (x, x') \in I^2, \quad |f(x) - f(x')| \leqslant k \cdot |x - x`|.$$

Si une telle constante $k$ convient, on dira alors que la fonction $f$ est $k$-***lipschitzienne***.

**Remarque 4** Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est lipschitzienne si et seulement si l'ensemble :

$$A = \left\{ \left| \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} \right| \in \mathbb{R} \mid (x \neq x') \in I^2 \right\} \qquad \text{est majoré.}$$

**Proposition 6** Toute fonction lipschitzienne sur un intervalle est uniformément continue.

**Exemple 12** • La fonction $x \longmapsto |x|$ est 1-lipschitzienne donc est continue. sur $\mathbb{R}$.
• La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue mais non lipschitzienne sur $[0, 1]$.
• Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue admettant des limites finies en $\pm\infty$, alors la fonction $f$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

## 4 Fonctions dérivables, premières propriétés

### 4.1 Définitions

**Définition 8** Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que la fonction $f$ est ***dérivable*** en $x_0$ si la limite $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie. Cette limite est appelée ***nombre dérivé de*** $f$ ***en*** $x_0$ et noté $f'(x_0)$. On dit qu'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est ***dérivable*** si elle est dérivable en tout point $x_0$ de $I$.

**Remarque 5** On parle également de dérivabilité à droite ou à gauche en $x_0$ lorsque les limites suivantes existent et sont finies : $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Le cas échéant, elles sont notées respectivement $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$.

**Exemple 13** La fonction $x \longmapsto |x|$ est dérivable à droite et à gauche sur $\mathbb{R}$ tout entier mais elle n'est pas dérivable en 0.

**Définition 9** Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2. On dit que la fonction $f$ est $n$-***fois dérivable*** si la fonction $f$ est $(n-1)$-fois dérivable et que sa dérivée $(n-1)^{ème}$ est encore dérivable. On note $f^{(n)}$ sa dérivée $n^{ème}$. La dérivée seconde est notée $f''$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que la fonction $f$ est ***de classe*** $C^n$ si la fonction $f$ est $n$-fois dérivable et que la dérivée $n^{ème}$ $f^{(n)}$ est continue.
On dit que la fonction $f$ est ***classe*** $C^\infty$ si la fonction $f$ est indéfiniment dérivable.
On note $C^n(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^n$, puis $C^\infty(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^\infty$.

**Remarque 6** L'ensemble $C^0(I,\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continues.

**Proposition 7** On a les propriétés suivantes :
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $C^{n+1}(I,\mathbb{R}) \subset C^n(I,\mathbb{R})$
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $f \in C^n(I,\mathbb{R})$, on a : $f' \in C^{n-1}(I,\mathbb{R})$
- $C^\infty(I,\mathbb{R}) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C^n(I,\mathbb{R})$.

**Exemple 14** Montrer que la fonction : $f : \left| \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{l} \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) \text{ sur } ]0,+\infty[ \\ 0, \text{ sur } ]-\infty, 0] \end{array} \right. \end{array} \right.$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

### 4.2 Dérivation et opérations

**Proposition 8** La somme, le produit, la composée de deux fonctions dérivables l'est encore, avec les formules :
- $(f+g)' = f' + g'$
- $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$
- $(g \circ f)' = g' \circ f \times f'$.
- $(f \cdot g)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}$ [formule de dérivation de Leibniz pour $f$ et $g$ $n$-fois dérivables]

**Proposition 9** La fonction réciproque d'une bijection dérivable dont la dérivée ne s'annule pas est encore dérivable selon la formule :
- $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

## 5 Théorèmes fondamentaux de la dérivabilité

### 5.1 Théorème de Rolle

**Théorème 5** Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur le segment $[a,b]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$ et vérifiant : $f(a) = f(b)$. Alors, il existe $c \in ]a,b[$ tel que :

$$f'(c) = 0.$$

### 5.2 Théorème des accroissements finis

**Théorème 6** Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur le segment $[a,b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$. Alors :

$$\exists c \in ]a,b[, \quad f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

**Méthode : Comment appliquer le théorème des accroissements finis ?**

Ce théorème sert à étudier le sens de variations de fonctions

- une fonction $f$ dérivable sur un intervalle telle que $f' \geqslant 0$ est une fonction croissante
- une fonction $f$ dérivable sur un intervalle telle que $f' > 0$ est une fonction strictement croissante
- une fonction $f$ dérivable sur un intervalle telle que $f' = 0$ est une fonction constante
- une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f' < 0$ réalise une bijection strictement décroissante de $[a, b]$ vers $[f(b), f(a)]$ [théorème de la bijection].

**Exemple 15** • Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant 1 + x$.
• Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leqslant |x|$.

### 5.2.1 Fonctions $C^1$ et fonctions lipschitziennes

**Proposition 10** Toute fonction de classe $C^1$ sur un segment de $\mathbb{R}$ y est lipschitzienne et donc uniformément continue.

**Exemple 16** • Montrer que la suite $u$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \operatorname{argsh}(u_n) \end{cases}$ est convergente de limite nulle.
• Montrer que la suite $u$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \cos(u_n) \end{cases}$ est convergente.
• Montrer que la suite $u$ définie par : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{1 + u_n^2} \end{cases}$ converge vers un nombre irrationnel.

### 5.2.2 Formule de Taylor-Lagrange

**Proposition 11** Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^n$ sur $[a, b]$ et $(n + 1)$-fois dérivable sur $]a, b[$. Alors, il existe $c \in ]a, b[$ tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (b - a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!} \cdot (b - a)^{n+1}.$$

**Exemple 17** • Montrer que :

$$e = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

• Montrer que :

$$\ln 2 = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot 2^k}.$$

• Montrer que :

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k + 1}.$$

#### 5.2.3 Théorème du prolongement de la dérivée

**Proposition 12** Soit $f : ]a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1$. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f'(x) = \ell$. Alors, il existe $\zeta \in \mathbb{R}$ tel que la fonction $g$ définie par :

$$g : \left| \begin{array}{ccl} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{cl} \zeta & \text{, si } x = a \\ f(x) & \text{, si } x > a \end{array} \right. \end{array} \right. \qquad \text{soit de classe } C^1 \text{ sur } [a,b].$$

# 6 Extrema et extrema locaux

## 6.1 Définitions

**Définition 10** Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in I$.

- On dit que la fonction $f$ ***admet un maximum en*** $x_0$ (resp. un ***minimum en*** $x_0$) si : $\forall x \in I$, $f(x) \leqslant f(x_0)$ (resp. $\forall x \in I$, $f(x) \geqslant f(x_0)$).
- On dit que la fonction $f$ ***admet un extrémum en*** $x_0$ si $f$ admet un maximum on un minimum en $x_0$.
- On dit que la fonction $f$ ***admet un maximum local en*** $x_0$ (resp. un ***minimum local en*** $x_0$) si : $\exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x - x_0| \leqslant \alpha \Longrightarrow f(x) \leqslant f(x_0)$ (resp. $\exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x - x_0| \leqslant \alpha \Longrightarrow f(x) \geqslant f(x_0)$).
- On dit que la fonction $f$ ***admet un extrémum local en*** $x_0$ si $f$ admet un maximum local on un minimum local en $x_0$.

**Exemple 18** Combien la fonction $f : x \longmapsto x^3 - 2x^2 - 2x + 1$ admet-elle d'extréma locaux ou globaux sur l'intervalle $[-1, 3[$ ?

## 6.2 Recherche d'un extrémum local

Méthode : Comment rechercher les extréma locaux d'une fonction ?

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Pour rechercer ses extréma locaux :

- s'assurer que $f$ est définie sur un ouvert
- s'assurer que $f$ est de classe $C^2$
- résoudre l'équation $f'(x) = 0$ (équation (E))
- pour chaque solution $x_0$ de (E), calculer $f''(x_0)$ :
  - si $f''(x_0) > 0$, $x_0$ est un minimum local
  - si $f''(x_0) < 0$, $x_0$ est un maximum local
  - si $f''(x_0) = 0$, on ne peut rien dire pour l'instant : faire un développement limité en $x_0$.

**Exemple 19**
- Quels sont les rectangles du plan de périmètre fixé et délimitant une aire maximale ?
- Soit $\mathscr{D}$ un disque du plan, de rayon strictement positif. Quels sont les triangles à sommets dans $\mathscr{D}$ et d'aire maximale ?

# 7 Convexité

## 7.1 Ensembles convexes

#### 7.1.1 Familles de points pondérés, barycentres

**Définition 11** On appelle ***famille de points pondérés*** $\Big((M_1,\lambda_1),\cdots,(M_n,\lambda_n)\Big)$ ***du plan***, la donnée de $n$ points $M_1,\cdots,M_n$ du plan $\mathbb{R}^2$ et la donnée de ***poids***, c'est-à-dire de scalaires $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$, dont la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\lambda_k$ n'est pas nulle.

**Proposition 13** Étant donnée une famille de points pondérés $\Big((M_1,\lambda_1),\cdots,(M_n,\lambda_n)\Big)$ du plan, il existe un seul point $G\in\mathbb{R}^2$ vérifiant les propriétés équivalentes suivantes :

- $\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\lambda_k}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\cdot\overrightarrow{OM_k}$
- pour tout point $M$ de $E$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\cdot\overrightarrow{MM_k}=\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\right)\cdot\overrightarrow{MG}$$

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\cdot\overrightarrow{M_kG}=\vec{0}$.

Le point $G$ ainsi défini s'appelle le ***barycentre de la famille de points pondérés*** $\Big((M_1,\lambda_1),\cdots,(M_n,\lambda_n)\Big)$. Lorsque tous les points $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ sont égaux, le barycentre $G$ s'appelle l'***isobarycentre de la famille*** $(M_1,\cdots,M_n)$.

**Exemple 20** • Si $A$ et $B$ sont deux points du plan, le milieu du segment $[A,B]$ est exactement l'isobarycentre des points $A$ et $B$.

• Si $\Big((z_1,\lambda_1),\cdots,(z_n,\lambda_n)\Big)$ est une famille de points pondérés de points dans le plan complexe $\mathbb{C}$, le barycentre de cette famille admet pour affixe :

$$g=\frac{1}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\lambda_k}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\cdot z_k.$$

De plus, si la somme des points $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\lambda_k$ est égale à 1, la formule devient :

$$g=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\cdot z_k.$$

• Si $z_1,\cdots,z_n$ sont des complexes, prendre l'isobarycentre de la famille $(z_1,\cdots,z_n)$ revient à prendre le barycentre de la famille de points pondérés $\left(\left(z_1,\dfrac{1}{n}\right),\cdots,\left(z_n,\dfrac{1}{n}\right)\right)$, l'avantage de cette écriture étant que la somme des poids vaut 1 et donc, l'isobarycentre de la famille $(z_1,\cdots,z_n)$ est d'affixe :

$$g=\frac{z_1+\cdots+z_n}{n}.$$

• Lorsque $n\geqslant 2$, l'isobarycentre des points de l'ensemble $\mathbb{U}_n=\Big\{z\in\mathbb{C}\mid z^n=1\Big\}=\Big\{e^{2ik\pi/n}\ ;\ k\in\{0,\cdots,n-1\}\Big\}$ est l'origine 0 de $\mathbb{C}$, alors que lorsque $n=1$, on a $\mathbb{U}_1=\{1\}$ d'isobarycentre d'affixe 1.

• Dans un triangle, les trois médianes se coupent en l'isobarycentre du triangle.

**Proposition 14** Voici les principales propriétés liées aux barycentres. On considère une famille $\Big((M_1,\lambda_1),\cdots,(M_n,\lambda_n)\Big)$ de points pondérés du plan.

- Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, les barycentres des familles de points pondérés $\Big((M_1,\lambda_1),\cdots,(M_n,\lambda_n)\Big)$ et $\Big((M_1,a\lambda_1),\cdots,(M_n,a\lambda_n)\Big)$ sont identiques.
- associativité du barycentre
  Soit $(U_i)_{1\leqslant i\leqslant s}$ une partition de l'ensemble des indices $[\![1,n]\!]$, de telle sorte que pour tout paquet $U_i$ d'indices, le poids total $\Lambda_i = \sum_{k\in U_i} \lambda_k$ du paquet de points $M_k$ d'indices dans $U_i$ soit non nul. On peut alors définir le barycentre $G_i$ de la famille de points pondérés $\Big((M_k,\lambda_k)\Big)_{k\in U_i}$. Le barycentre de la famille de points pondérés $\Big((G_1,\Lambda_1),\cdots,(G_s,\Lambda_s)\Big)$ est exactement le barycentre de la famille $\Big((M_1,\lambda_1),\cdots,(M_n,\lambda_n)\Big)$.
- Si $A$ et $B$ sont deux points du plan, l'ensemble des barycentres des familles $\Big((A,\lambda),(B,1-\lambda)\Big)$, lorsque $\lambda$ décrit $\mathbb{R}$ est exactement la droite $(AB)$ et l'ensemble des barycentres des familles $\Big((A,\lambda),(B,1-\lambda)\Big)$, lorsque $\lambda$ décrit $[0,1]$ est exactement le segment $[A,B]$.

### 7.1.2 Définition de la convexité des ensembles

**Définition 12** Soit $\mathscr{C}$ une partie du plan $\mathbb{R}^2$.
On dit que la partie $\mathscr{C}$ est ***convexe*** si pour tous points $A$ et $B$ dans $\mathscr{C}$, le segment $[A,B]$ est toujours inclus dans $\mathscr{C}$.

**Exemple 21** • Toute droite du plan est convexe. Tout disque ouvert ou fermé est convexe.
• Les ensembles convexes de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles.
• Toute partie finie comportant au moins deux éléments n'est pas convexe ; Tout cercle de rayon strictement positif n'est pas convexe. Toute partie du plan égale au complémentaire d'un ensemble borné n'est pas convexe.

### 7.1.3 Enveloppe convexe d'une partie

**Proposition 15** • L'intersection quelconque de parties convexes du plan reste un ensemble convexe.
• Soit $\mathscr{A}$ une partie quelconque du plan.
Il existe un plus petit convexe pour l'inclusion contenant l'ensemble $\mathscr{A}$. Il s'agit de tous les barycentres à poids positifs de points dans $\mathscr{A}$. Ce convexe minimal contenant $\mathscr{A}$ s'appelle l'***enveloppe convexe de*** $\mathscr{A}$.

**Exemple 22** • Soit $\mathscr{A}$ une partie du plan. L'ensemble $\mathscr{A}$ est convexe si et seulement si l'enveloppe convexe de $\mathscr{A}$ est égale à $\mathscr{A}$.
• Quelle est l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points du plan ?
• Quelle est l'enveloppe convexe de l'ensemble des points de la courbe $y = e^x$, de la courbe $y = \cos x$ ?

## 7.2 Fonctions convexes d'une variable réelle

### 7.2.1 Mise en place

**Définition 13** Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$. On dit que la fonction $f$ est ***convexe***, si pour tout $\lambda \in [0,1]$ et pour tous $x$ et $y$ dans l'intervalle $I$, on a l'inégalité :

$$f\Big((1-\lambda)\ x + \lambda\ y\Big) \leqslant (1-\lambda)\ f(x) + \lambda\ f(y).$$

On dit que la fonction $f$ est ***concave*** si la fonction $(-f)$ est convexe : autrement dit, la fonction $f$ est concave lorsque l'inégalité ci-dessus a lieu avec le signe « $\geqslant$ ».

**Définition 14** Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$.
On appelle ***épigraphe de la fonction*** $f$, l'ensemble des points $M$ du plan au-dessus de la courbe $y = f(x)$ :

$$\mathscr{E}_f = \Big\{M(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I \text{ et } y \geqslant f(x)\Big\}.$$

On appelle ***corde du graphe*** $y = f(x)$, tout segment $[M, M']$ avec $M$ et $M'$ deux points de la courbe $y = f(x)$.

### 7.2.2 Propriétés des fonctions convexes

**Proposition 16** Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle $I$. On a les propriétés suivantes :

- la fonction $f$ est convexe si et seulement si l'épigraphe $\mathscr{E}_f$ est une partie convexe du plan
- la fonction $f$ est convexe si et seulement si pour tout $x_0 \in I$, l'application $\varphi : x \longmapsto \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est croissante sur l'ensemble $I \setminus \{x_0\}$
- si la fonction $f$ est dérivable, la fonction $f$ est convexe si et seulement si la fonction $f'$ est croissante ; si la fonction $f$ est deux fois dérivable, la fonction $f$ est convexe si et seulement si la fonction $f''$ est positive sur $I$
- inégalité de Jensen
  Si la fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe, pour toutes abscisses $x_1, \cdots, x_n$ dans $I$ et tous poids $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ positifs ou nuls et de somme égale à 1, on a :

  $$\boxed{f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot f(x_k)}$$

  Cette inégalité s'interprète géométriquement comme le fait qu'en notant $G$ le barycentre de la famille de points $(M_k, \lambda_k)$ avec les points $M_k$ sur la courbe $y = f(x)$, alors le point $G$ est au-dessus de la courbe.

### 7.2.3 Applications de la convexité des fonctions

**Méthode : Comment montrer qu'une fonction est convexe ?**

Étant donnée une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur un intervalle $I$, pour montrer que $f$ est convexe :

- ▶ on vérifie que la fonction $f$ est dérivable et que la dérivée $f'$ est croissante sur $I$
- ▶ on vérifie que la fonction $f$ est deux fois dérivable et que la fonction $f''$ est positive sur $I$.

Méthode : Comment exploiter le fait qu'une fonction est convexe ?

Étant donnée une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie et convexe sur un intervalle $I$, pour utiliser cette convexité :

- on dit que toutes les cordes sont au-dessus du graphe $y = f(x)$
- lorsque la fonction $f$ est dérivable, on dit que toutes les tangentes sont en-dessous du graphe
- on utilise l'inégalité de Jensen : pour toutes abscisses $x_1, \cdots, x_n$ dans $I$ et tous poids $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ positifs ou nuls et de somme égale à 1, on a : $f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, f(x_k)$.

**Exemple 23** • Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et convexe. Alors, toutes les tangentes à la courbe $y = f(x)$ sont en-dessous de la courbe.
• Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite ***concave*** si la fonction $(-f)$ est convexe. Toutes les inégalités trouvées pour les fonctions convexes sont inversées pour les fonctions concaves.
• Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe sur l'intervalle $I$ d'extrémités $a < b$. Alors, la fonction $f$ est dérivable à droite et à gauche en tout point de $]a, b[$ : elle est donc a fortiori continue sur $]a, b[$. Est-elle continue en $a$ ou $b$ si elle est définie en ces points ?

**Exemple 24** • Pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{2}{\pi}\, x \leqslant \sin x \leqslant x$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + x \leqslant e^x$ et pour tout $x \in ]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leqslant x$.
- Pour tous nombres strictement positifs $x_1, \cdots, x_n$, on pose :
  - ▷ la <u>moyenne arithmétique</u> : $m_1 = \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$
  - ▷ la <u>moyenne géométrique</u> : $m_2 = \sqrt[n]{x_1 \times \cdots \times x_n}$
  - ▷ la <u>moyenne harmonique</u> : $m_3 = \left(\dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x_k}\right)^{-1}$

  Alors, $m_3 \leqslant m_2 \leqslant m_1$.