

Chapitre 5 : Fonctions usuelles

Table des matières

1	Préambule	2
1.1	Symétrie par rapport à la première bissectrice	2
1.2	Courbes d'une bijection et de sa réciproque	2
2	Fonctions logarithme, exponentielle, puissance	2
2.1	Fonction logarithme	2
2.2	Fonction exponentielle	3
2.3	Fonction puissance	3
2.4	Comportements au voisinage de $+\infty$	3
3	Fonctions circulaires et circulaires réciproques	4
3.1	Fonctions circulaires	4
3.1.1	Fonction cosinus	4
3.1.2	Fonction sinus	4
3.1.3	Fonction tangente	4
3.2	Fonctions circulaires réciproques	4
3.2.1	Fonction arccosinus	4
3.2.2	Fonction arcsinus	5
3.2.3	Fonction arctangente	5
3.3	Formules	6
4	Fonctions hyperboliques	6
4.1	Fonction cosinus hyperbolique	6
4.2	Fonction sinus hyperbolique	7
4.3	Fonction tangente hyperbolique	7
4.4	Trigonométrie hyperbolique	7
4.5	Fonctions hyperboliques réciproques	7

1 Préambule

1.1 Symétrie par rapport à la première bissectrice

Définition 1 On munit le plan $\mathbb{R}^2$ d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (0, \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel seront calculées les coordonnées cartésiennes des points.

On appelle *première bissectrice*, la droite Δ d'équation $y = x$.

Proposition 1 L'application $s : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto (y, x) \end{cases}$ correspond à la symétrie par rapport à la première bissectrice Δ .

1.2 Courbes d'une bijection et de sa réciproque

Proposition 2 Soit $f : I \longrightarrow J$ une fonction bijective entre deux parties I et J de $\mathbb{R}$.

La courbe $\mathcal{C}_f$ est l'ensemble des points M de coordonnées $(x, f(x))$, pour x variant dans I .

Alors, les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice $\Delta : s(\mathcal{C}_f) = \mathcal{C}_{f^{-1}}$.

2 Fonctions logarithme, exponentielle, puissance

2.1 Fonction logarithme

Définition 2 On appelle fonction *logarithme népérien*, la primitive de la fonction $\begin{cases}]0, +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{1}{x} \end{cases}$ s'annulant en $x = 1$. Cette fonction est notée $\ln$ et on a donc :

$$\forall x > 0, \quad \ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

Proposition 3 On a les formules suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$
- pour tout $(a, b) \in]0, +\infty[^2$, on a :

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b \text{ et } \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b.$$

Définition 3 Soit $a > 1$. On appelle fonction *logarithme en base a*, la fonction : $\log_a = \frac{\ln}{\ln a}$. On note d'autre part : $\log = \log_{10}$.

Exemple 1 • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\log 10^n = n$.

- Si $n \in \mathbb{N}^*$, combien l'entier n admet-il de chiffres en base 10 ?

2.2 Fonction exponentielle

Définition 4 La fonction $\ln :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est une bijection de dérivée strictement positive. On appelle fonction *exponentielle* notée $\exp$, la fonction réciproque de cette application.

Proposition 4 La fonction $\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ est dérivable, de dérivée égale à elle-même.

Proposition 5 On dispose des formules suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.
- pour tous nombres réels a et b , on a :

$$e^{a+b} = e^a \cdot e^b \text{ et } e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}.$$

Définition 5 Soit $a > 0$. On appelle *exponentielle en base a* , la fonction $\exp_a : x \mapsto e^{x \cdot \ln a}$ que l'on note a^x .

2.3 Fonction puissance

Définition 6 On appelle fonction *puissance*, toute fonction de la forme :
$$\begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^a = e^{a \cdot \ln x} \end{array}$$
 où a est une constante réelle.

Proposition 6 Soit $a \in \mathbb{R}$. L'application $x \mapsto x^a$ est une bijection de $]0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$ de dérivée égale à $x \mapsto a \cdot x^{a-1}$.

Exemple 2 Déterminer le domaine de définition de la fonction $x \mapsto x^x$ et dériver cette fonction.

Proposition 7 On dispose des formules suivantes :

- pour tout $a > 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^a = +\infty$
- pour tous a et b dans $\mathbb{R}$, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$ et $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$.
- pour tous a et b strictement positifs et $x \in \mathbb{R}$, $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$
- pour tous a , b et c strictement positifs, $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$.

2.4 Comportements au voisinage de $+\infty$

Proposition 8 La comparaison des fonctions de référence au voisinage de $+\infty$ fournit :

- pour tout $a > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$
- pour tout $a > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0$

Remarque 1 • Les autres formes indéterminées peuvent normalement se déduire de ces deux limites, les formes indéterminées " $\frac{0}{0}$ " pouvant également faire intervenir des taux de variation.

• Lorsque $\alpha = n$ est un entier naturel, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient $x^n = \overbrace{x \times x \times \cdots \times x}^{n \text{ fois}}$. On peut alors prolonger la fonction puissance sur $\mathbb{R}$ en une fonction polynomiale.

• Lorsque $\alpha = n$ est un entier strictement négatif, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on obtient $x^n = \left(\frac{1}{x}\right)^{-n}$. On peut alors prolonger la fonction puissance sur $\mathbb{R}^*$.

• Lorsque α est l'inverse d'un entier impair, en posant $\frac{1}{\alpha} = 2s+1$, alors la fonction polynomiale $x \mapsto x^{2s+1}$ étant bijective sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto x^\alpha = \sqrt[2s+1]{x}$ est la bijection réciproque de cette application. La fonction puissance est alors définie sur $\mathbb{R}$.

Exemple 3 Déterminer pour tout $a > 0$, la limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \cdot \ln x$.

3 Fonctions circulaires et circulaires réciproques

3.1 Fonctions circulaires

3.1.1 Fonction cosinus

La fonction $x \mapsto \cos x$ est définie sur $\mathbb{R}$, est 2π -périodique, paire de dérivée $x \mapsto -\sin x$. Il suffit de l'étudier sur l'intervalle $[0, \pi]$.

3.1.2 Fonction sinus

La fonction $x \mapsto \sin x$ est définie sur $\mathbb{R}$, est 2π -périodique, impaire de dérivée $x \mapsto \cos x$. Il suffit également de l'étudier sur l'intervalle $[0, \pi]$.

3.1.3 Fonction tangente

La fonction $x \mapsto \tan x$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi \cdot \mathbb{Z}\right)$, est π -périodique, impaire de dérivée $x \mapsto 1 + \tan^2 x$. Il suffit de l'étudier sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. La fonction tangente est strictement croissante sur tout intervalle inclus dans son domaine de définition.

3.2 Fonctions circulaires réciproques

3.2.1 Fonction arccosinus

Définition 7 La fonction $\cos : \begin{cases} [0, \pi] & \longrightarrow & [-1, 1] \\ x & \longmapsto & \cos x \end{cases}$ est une bijection strictement décroissante. On appelle fonction **arccosinus** et on note $\arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$, la fonction réciproque de cette bijection. Autrement dit, pour $x \in [-1, 1]$, le nombre $\theta = \arccos x$ est le **seul nombre** vérifiant les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} \cos \theta = x \\ \theta \in [0, \pi] \end{cases}.$$

Méthode : Comment calculer $\arccos x$?

- résoudre $\cos \theta = x$ d'inconnue θ
- ne retenir que la seule solution entre 0 et π .

Exemple 4 Calculer $\arccos \frac{1}{2}$ et $\arccos \sin \frac{13\pi}{5}$.

Proposition 9 La fonction $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ est continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $] -1, 1[$, de dérivée :

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad \arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3.2.2 Fonction arcsinus

Définition 8 La fonction $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \rightarrow [-1, 1]$ est une bijection strictement croissante. On appelle fonction **arcsinus** et on note $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$, la fonction réciproque de cette bijection. Autrement dit, pour $x \in [-1, 1]$, le nombre $\theta = \arcsin x$ est le **seul nombre** vérifiant les deux conditions suivantes :
$$\begin{cases} \sin \theta = x \\ \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \end{cases}.$$

Méthode : Comment calculer $\arcsin x$?

- résoudre $\sin \theta = x$ d'inconnue θ
- ne retenir que la seule solution entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

Exemple 5 Calculer $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ et $\arcsin \cos \frac{13\pi}{5}$.

Proposition 10 La fonction $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ est continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $] -1, 1[$, de dérivée :

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad \arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3.2.3 Fonction arctangente

Définition 9 La fonction $\tan : \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow \mathbb{R}$ est une bijection strictement croissante. On appelle fonction **arctangente** et on note $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, la fonction réciproque de cette bijection. Autre-

ment dit, pour $x \in \mathbb{R}$, le nombre $\theta = \arctan x$ est le **seul nombre** vérifiant les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} \tan \theta = x \\ \theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\end{cases}.$$

Méthode : Comment calculer $\arctan x$?

- ▶ résoudre $\tan \theta = x$ d'inconnue θ
- ▶ ne retenir que la seule solution strictement entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

Exemple 6 Calculer $\arctan 1$ et $\arctan \tan \frac{45\pi}{7}$.

Proposition 11 La fonction $\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan' x = \frac{1}{1+x^2}.$$

3.3 Formules

Proposition 12 On dispose des formules suivantes :

- pour tout $x \in [-1, 1]$, $\sin \arccos x = \cos \arcsin x = \sqrt{1-x^2}$
- pour tout $x \in [-1, 1]$, $\cos \arccos x = \sin \arcsin x = x$
- pour tout $x \in [-1, 1]$, $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$

Proposition 13 On a également :

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tan \arctan x = x$
- pour tout $x > 0$, $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ et pour tout $x < 0$, $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$

4 Fonctions hyperboliques

4.1 Fonction cosinus hyperbolique

Définition 10 On appelle fonction *cosinus hyperbolique*, et on note ch la fonction : $\operatorname{ch} :$

$$\begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & [1, +\infty[\\ x & \longmapsto & \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{cases}.$$

Proposition 14 La fonction ch est paire, dérivable de dérivée égale à $\operatorname{ch}' x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. La fonction ch réalise une bijection strictement croissante de $[0, +\infty[$ vers $[1, +\infty[$. De plus, les courbes $y = \operatorname{ch} x$ et $y = \frac{e^x}{2}$ sont asymptotes en $+\infty$, la courbe $y = \operatorname{ch} x$ étant au-dessus.

4.2 Fonction sinus hyperbolique

Définition 11 On appelle fonction *sinus hyperbolique*, et on note sh la fonction : sh : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:
$$x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Proposition 15 La fonction sh est impaire, dérivable de dérivée égale à $\text{sh}'x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. La fonction sh réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. De plus, les courbes $y = \text{sh}x$ et $y = \frac{e^x}{2}$ sont asymptotes en $+\infty$, la courbe $y = \text{sh}x$ étant en dessous.

4.3 Fonction tangente hyperbolique

Définition 12 On appelle fonction *tangente hyperbolique*, et on note th la fonction : th : $\mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$:
$$x \mapsto \frac{\text{sh}x}{\text{ch}x}.$$
 On a donc les différentes formules suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{th } x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}.$$

Proposition 16 La fonction th est impaire, dérivable de dérivée égale à $\text{th}' = \frac{1}{\text{ch}^2}$. La fonction th réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $] -1, 1[$.

4.4 Trigonométrie hyperbolique

On remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a d'après les formules d'EULER : $\cos x = \text{ch}(ix)$, $\sin x = \frac{\text{sh}(ix)}{i}$ et $\tan x = \frac{\text{th}(ix)}{i}$. Les formules de trigonométrie classique induisent ainsi des formules de trigonométrie hyperbolique.

Proposition 17 On peut écrire :

- $\text{ch}' = \text{sh}$, $\text{sh}' = \text{ch}$ et $\text{th}' = 1 - \text{th}^2$
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$
- pour tous a et b dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\text{ch}(a + b) = \text{ch}a \cdot \text{ch}b + \text{sh}a \cdot \text{sh}b$$

$$\text{sh}(a + b) = \text{sh}a \cdot \text{ch}b + \text{sh}b \cdot \text{ch}a$$

$$\text{th}(a + b) = \frac{\text{th } a + \text{th } b}{1 + \text{th } a \cdot \text{th } b}$$

4.5 Fonctions hyperboliques réciproques

Définition 13 • La fonction $\text{ch} : [0, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$ réalise une bijection strictement croissante. On définit la fonction $\text{argch} : [1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ comme la fonction réciproque de cette application.

• La fonction $\text{sh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ réalise une bijection strictement croissante. On définit la fonction $\text{argsh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ comme la réciproque de cette application.

• La fonction $\text{th} : \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$ réalise une bijection strictement croissante. On définit la fonction $\text{argth} :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ comme la réciproque de cette application.

Proposition 18 • La fonction argch est dérivable sur $]1, +\infty[$ et :

$$\forall x \in]1, +\infty[, \text{argch}'x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

• La fonction argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{argsh}'x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

• La fonction argth est dérivable sur $] -1, 1[$ et :

$$\forall x \in] -1, 1[, \text{argth}'x = \frac{1}{1 - x^2}.$$

• Pour tout $x \in [1, +\infty[$:

$$\text{argch}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).$$

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{argsh}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right).$$

• Pour tout $x \in] -1, 1[$:

$$\text{argth}x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$