Chapitre 4 : Techniques en Analyse

Table des matières

1 Dérivées

Définition 1 Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie autour d'un nombre réel x_0 est dite ***dérivable en*** x_0 si la limite du ***taux de variation***

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existe et est finie.
On note alors $f'(x_0)$ la valeur de cette limite et on l'appelle ***nombre dérivé de la fonction*** f ***en*** x_0.
On dit qu'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est ***dérivable*** si elle est dérivable en tout point x_0 de I. On note alors $f' : x \longmapsto f'(x)$ sa ***fonction dérivée***. On peut alors parler de dérivées supérieures d'ordre 2, 3, ..., lorsque l'on peut dériver la fonction f, deux fois, trois fois, ... On note alors f'' sa ***dérivée seconde*** ou $f^{(k)}$ la ***dérivée*** $k^{ème}$ de f.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit qu'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est ***de classe*** C^n si la fonction f est n-fois dérivable sur I et si sa dérivée $n^{ème}$ $f^{(n)}$ est continue sur I. Ainsi, la fonction f est de classe C^0 si et seulement si elle est continue.

Proposition 1 Si f est dérivable en x_0, alors la courbe $y = f(x)$ admet une tangente géométrique au point $M_0(x_0, f(x_0))$ d'équation :

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0).$$

Exemple 1 Quelles sont les tangentes à la courbe $y = \dfrac{\ln x}{x}$ passant par l'origine ?

1.1 Formulaire de dérivées

Méthode : Que retenir comme dérivées usuelles ?

Voici la liste des dérivées à connaître :

fonctions	dérivées	fonctions	dérivées
$x \longmapsto x^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R})$	$x \longmapsto \alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$x \longmapsto \cos x$	$x \longmapsto -\sin x$
$x \longmapsto e^x$	$x \longmapsto e^x$	$x \longmapsto \sin x$	$x \longmapsto \cos x$
$x \longmapsto \ln\lvert x\rvert$	$x \longmapsto \dfrac{1}{x}$	$x \longmapsto \tan x$	$x \longmapsto 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

1.2 Opérations sur les dérivées

Proposition 2 Étant données des fonctions dérivables, f et g, toutes les fonctions présentées ci-dessous sont dérivables et on a les formules :

- pour la somme : $(f + g)' = f' + g'$

- si $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda \cdot f)' = \lambda \cdot f'$
- $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$
- si g ne s'annule pas : $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$
- $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$
- si f est une bijection dérivable et de dérivée ne s'annulant pas : $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Exemple 2 Calculer les dérivées des fonctions suivantes :
- $x \longmapsto \cos(2\sin x) + e^{\sqrt{3x-1}}$
- $x \longmapsto \ln(\ln x)$
- $x \longmapsto f^{-1}(x)$, lorsque f est la restriction de la fonction cos de $]0, \pi[$ vers $]-1, 1[$.

1.3 Exploitation des dérivées

Méthode : Comment étudier une fonction ?

Avant tout, il faut utiliser le résultat très important suivant :

si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors :
- la fonction f est croissante $\Longleftrightarrow \forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0$
- si $\forall x \in I,\ f'(x) < 0$, alors la fonction f est strictement décroissante
- la fonction f est constante $\Longleftrightarrow f' = 0$.

Voici le plan d'étude à adopter pour une fonction :
- ▶ identifier le domaine $\mathscr{D}$ de définition de la fonction f
- ▶ identifier des symétries éventuelles (fonction paire, fonction impaire, fonction périodique) pour ensuite restreindre le domaine d'étude à une partie I
  - $\longrightarrow$ si $a > 0$ et pour tout x, $f(x+a) = f(x)$, on étudie la fonction sur un intervalle d'amplitude a et on observe une périodicité de la courbe
  - $\longrightarrow$ si pour tout x, $f(a-x) = f(x)$, on étudie la fonction sur $\mathscr{D} \cap \left[\dfrac{a}{2}, +\infty\right[$, l'application $x \longmapsto a - x$ étant la symétrie autour du point $\dfrac{a}{2}$ sur l'axe des réels et on observe une symétrie de la courbe par rapport à la droite verticale d'équation $x = \dfrac{a}{2}$
  - $\longrightarrow$ si pour tout x, $f(a-x) = b - f(x)$, on étudie la fonction sur $\mathscr{D} \cap \left[\dfrac{a}{2}, +\infty\right[$, et on observe une symétrie de la courbe par rapport au point $\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{b}{2}\right)$
- ▶ vérifier que la fonction f est dérivable sur I et calculer $f'(x)$
- ▶ déterminer le signe de $f'(x)$ et les valeurs d'annulation de f'
- ▶ mettre en place un tableau de variation de la forme :

x		x_0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$

- ▶ calculer les limites aux bornes du domaine I
- ▶ pour étudier une éventuelle asymptote en $\pm\infty$ – par exemple en $+\infty$:
  - sous réserve d'existence, calculer $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$
  - sous réserve d'existence, calculer $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) - m \cdot x = p$
  - si m et p existent et sont finies, la droite $y = m \cdot x + p$ est asymptote à la courbe $y = f(x)$
- ▶ tracer la courbe $y = f(x)$ sur I, puis utiliser les symétries éventuelles pour avoir la courbe $y = f(x)$ sur le domaine $\mathscr{D}$ tout entier.

Exemple 3 Calculer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$
- $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{x-\frac{\pi}{4}}{\sin(2x)-1}$
- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{x^2}-e}{\ln(2+x)-\ln 3}$

Exemple 4 • Étudier la fonction $f : t \longmapsto \cos^3 t + \sin^3 t$.

- Étudier la fonction $g : x \longmapsto \ln(e^{2x}+e^x-2)$.

Méthode : Comment établir une inégalité $f(x) \leqslant g(x)$?

- ▶ mettre tous les x d'un même bord
- ▶ étudier la fonction $h \longmapsto g(x) - f(x)$.

Exemple 5 Montrer que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ \frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x.$$

Méthode : Comment résoudre une équation $f(x) = 0$?

- ▶ étudier la fonction f
- ▶ appliquer le théorème de la bijection :

  si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable et f' est strictement positive (resp. strictement négative) sur $]a,b[$, alors f induit une bijection strictement croissante (resp. strictement décroissante) de $[a,b]$ vers $[f(a), f(b)]$ (resp. vers $[f(b), f(a)]$)
- ▶ compter le nombre de fois où la courbe $y = f(x)$ touche l'axe des abscisses.

Exemple 6 • Soit P une fonction polynomiale à coefficients réels et de degré impair. Montrer que le polynôme admet au moins une racine réelle.

- Déterminer le nombre de solutions réelles à l'équation $e^x = x + 2$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

2 Intégrales et primitives

Définition 2 Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction, on appelle ***primitive*** de la fonction f, toute fonction $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $F' = f$.

Proposition 3 Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur l'intervalle I, alors f admet des primitives. Plus précisément, si $x_0 \in I$, il existe une seule primitive F de f s'annulant en x_0 et cette primitive est définie par la formule :

$$\forall x \in I,\ F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\ dt.$$

Toutes les primitives de la fonction f sont alors les fonctions $F + c$, où c est n'importe quelle constante réelle.

Remarque 1 • Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, la valeur de $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ correspond à l'aire algébrique du domaine $\mathscr{D} = \Big\{M(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b \text{ et } y \text{ entre } 0 \text{ et } f(x)\Big\}$.

• Étant donnée une intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$, la fonction f est appelée ***intégrande***.

2.1 Premières propriétés de l'intégrale

Proposition 4 • L'intégrale est <u>positive</u> : si $a < b$ sont deux réels, si $f : [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ est une fonction continue positive, alors : $\displaystyle\int_a^b f \geqslant 0$

• L'intégrale est <u>linéaire</u> : si $f : [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ et $g : [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues, puis λ est un réel, alors : $\displaystyle\int_a^b (\lambda \cdot f + g) = \lambda \cdot \int_a^b f + \int_a^b g$

• On dispose de l'<u>inégalité triangulaire</u> valable pour toute fonction $f : [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ continue :

$$\left| \int_a^b f \right| \leqslant \int_a^b |f|$$

Exemple 7 • Montrer que la fonction $H : x \longmapsto \displaystyle\int_{1+e^x}^{2+\sin^2 x} \frac{\ln t}{1+t^2}\, dt$ est dérivable et calculer sa fonction dérivée H'.

• Étudier la suite $\displaystyle\left(u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+e^t}\, dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

2.2 Calcul direct de primitive

Méthode : Comment calculer directement une intégrale ?

Pour calculer $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ directement :

- trouver une primitive F de f à partir du formulaire
- utiliser la formule :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\ dt = \Big[F(t)\Big]_a^b = F(b) - F(a)}$$

Voici un premier formulaire de primitives usuelles :

fonctions	primitives	fonctions	primitives
$u' \cdot u^\alpha$ avec $(\alpha \neq -1)$	$\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$u' \cdot \cos u$	$\sin u$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$	$u' \cdot \sin u$	$-\cos u$
$u' \cdot e^u$	e^u	$u' \cdot (1+\tan^2 u) = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$	$\tan u$

Exemple 8 Donner des primitives des fonctions suivantes :

- $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x}$ sur $]0,+\infty[$, $x \longmapsto \sin^3(3x)$ sur $\mathbb{R}$
- $\dfrac{\cos}{5\sqrt{\sin}}$ sur $]0,\pi[$, $x \longmapsto 3x \cdot e^{-x^2}$, sur $\mathbb{R}$
- $x \longmapsto \tan x$, sur un intervalle I inclus dans le domaine de définition de $\tan$.

2.3 Calcul d'intégrale par intégration par parties

Méthode : Comment faire une intégration par parties ?

Cette formule permet de calculer l'intégrale $\int_a^b u(t) \cdot v'(t)\ dt$, avec les fonctions u et v de classe C^1 sur $[a, b]$:

- calculer $u'(t)$ et trouver une primitive $v(t)$ de $v'(t)$
- utiliser la formule :

$$\boxed{\int_a^b u(t) \cdot v'(t)\ dt = \Big[u(t) \cdot v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u'(t) \cdot v(t)\ dt}$$

Pour calculer l'intégrale $\int_a^b f(t)\ dt$ par intégration par parties :

- interpréter l'intégrande comme un produit de deux fonctions : $f = u \cdot v'$
- dériver l'un des facteurs et intégrer l'autre facteur du produit : en l'occurrence, dériver la fonction u et intégrer la fonction v'
- utiliser alors $\int_a^b f = \int_a^b u \cdot v' = \Big[u \cdot v\Big]_a^b - \int_a^b u' \cdot v$
- vérifier que la nouvelle intégrale à calculer $\int_a^b u' \cdot v$ est plus simple à calculer que l'ancienne intégrale $\int_a^b u \cdot v'$.

Exemple 9 • Déterminer une primitive des fonctions $x \longmapsto e^x \cdot \sin x$ et $x \longmapsto \ln x$.

- Calculer $I_n = \int_0^1 x^n \cdot e^{-x}\ dx$.

2.4 Calcul d'intégrale par changement de variable

Méthode : Comment faire un changement de variable dans une intégrale ?

Pour effectuer le changement de variable $t = \varphi(x)$ dans l'intégrale $\int_a^b f(x)\ dx$, il faut :

- s'assurer que $\varphi(\cdot)$ est bijective et que $\psi = \varphi^{-1}$ est dérivable entre $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ strictement
- calculer ensuite :
  - x en fonction de t : $x = \varphi^{-1}(t) = \psi(t)$
  - $f(x) = f(\psi(t))$
  - $dx = \psi'(t)\ dt$
- ne pas oublier les nouvelles bornes : quand x varie de a vers b, t varie de $\varphi(a)$ vers $\varphi(b)$
- appliquer la formule :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\ dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\psi(t)) \cdot \psi'(t)\ dt}$$

Exemple 10 Calculer les intégrales suivantes :

- $\int_0^1 \sqrt{1 - t^2}\ dt$ en posant $t = \cos u$
- $\int_0^1 e^{e^t + 2t}\ dt$.

3 Dérivées de fonctions à valeurs complexes

Définition 3 Soient I une partie de $\mathbb{R}$, x_0 un point de I, puis $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes. On dit que la fonction f est dérivable en x_0 si la limite du quotient $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe lorsque x tend vers x_0 dans I. Dans ce cas, on note $f'(x_0)$ cette limite appelée nombre dérivé de la fonction f au point x_0.
La fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est dite dérivable sur I si elle est dérivable en tout point x_0 de I.
On parle de même de fonctions deux fois, trois fois, n fois dérivables sur I et on note f'', $f^{(3)}$, $f^{(n)}$ leurs dérivées successives.

Proposition 5 Voici les principales propriétés de la dérivation des fonctions complexes :

- si $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction, en posant $g = \Re e(f)$ et $h = \Im m(f)$ qui sont deux fonctions de I vers $\mathbb{R}$, alors $f = \Re e(f) + i\Im m(f)$ et la fonction f est dérivable si et seulement si les fonctions $\Re e(f)$ et $\Im m(f)$ le sont sur I. Lorsque cela est le cas,
$$f' = (\Re e(f))' + i(\Im m(f))'$$
- si $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{C}$ sont deux fonctions dérivables, alors $f+g$ et $f \times g$ le sont aussi et :
$$(f+g)' = f' + g', \text{ puis } (f \times g)' = f' \times g + f \times g'.$$
- pour tout complexe q, la fonction $f : t \longmapsto e^{qt}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée :
$$f' : t \longmapsto q\, e^{qt}.$$

4 Équations différentielles linéaires

Définition 4 On appelle ***équation différentielle linéaire d'ordre*** n ***ou E.D.L***$_n$, toute équation de la forme :
$$a_n(x)\ y^{(n)} + a_{n-1}(x)\ y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\ y' + a_0(x)\ y = f(x),$$
d'inconnue $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable sur I, les fonctions $a_0, \cdots, a_n$ et f étant connues. Le terme $f(x)$ s'appelle le ***second membre***.
L'équation $a_n(x)\ y^{(n)} + a_{n-1}(x)\ y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\ y' + a_0(x)\ y = 0$ d'inconnue y s'appelle l'***équation homogène associée***.

Méthode : Quel est le principe général à toute E.D.L. ?

- résoudre d'abord l'équation homogène associée $a_n(x)\ y^{(n)} + a_{n-1}(x)\ y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\ y' + a_0(x)\ y = 0$: on trouve un ensemble $\mathscr{S}_0$ de fonctions solutions
- trouver une solution particulière y_1 à l'équation initiale $a_n(x)\ y^{(n)} + a_{n-1}(x)\ y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\ y' + a_0(x)\ y = f(x)$
- l'ensemble des solutions $\mathscr{S}$ à l'équation initiale est alors :
$$\boxed{\mathscr{S} = \mathscr{S}_0 + y_1 = \left\{ y_0 + y_1\ ;\ y_0 \in \mathscr{S}_0 \right\}}$$

Méthode : Comment appliquer le principe de superposition ?

Pour trouver une solution particulière à une équation différentielle de la forme :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\ y^{(k)} = f(x) \qquad\qquad [\text{équation } \mathscr{E}],$$

où le second membre est lui-même une somme de fonctions plus simples :

$$f = \sum_{i=1}^{s} f_i,$$

- ▶ trouver, pour tout entier $i \in [\![1, s]\!]$, une solution particulière y_i à l'équation :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\ y^{(k)} = f_i(x);$$

- ▶ utiliser le fait que la fonction $y = \sum_{i=1}^{s} y_i$ est alors solution de l'équation de départ $\mathscr{E}$.

4.1 E.D.L.$_1$

Méthode : Comment résoudre une équation de la forme $a(x) \cdot y' + b(x) \cdot y = 0$?

- ▶ résoudre sur un intervalle I où la fonction $a(\cdot)$ ne s'annule pas
- ▶ trouver une primitive A de la fonction $x \longmapsto \dfrac{b(x)}{a(x)}$ sur I
- ▶ donner les solutions : $y : x \longmapsto \kappa \cdot e^{-A(x)}$, avec $\kappa \in \mathbb{R}$.

Exemple 11 • Résoudre : $(x^2 - 1)y' + (2x + 1)y = 0$ sur $]1, +\infty[$.
• Résoudre $ay' + by = 0$, avec $a \neq 0$ et b deux constantes.

Méthode : Comment trouver une solution particulière à l'équation $ay' + by = f(t)$, avec $a \neq 0$ et b constants ?

Lorsque le second membre $f(t)$ est sous la forme d'une somme de termes adéquats du type polynôme $\times$ exponentielle $\times$ sinus ou cosinus :

- ▶ écrire $f(t)$ comme une somme d'expressions de la forme $f_i(t) = P(t) \cdot e^{mt}$ ou $f_i(t) = P(t) \cdot e^{mt} \cdot \cos(\mu t)$ ou encore $f_i(t) = P(t) \cdot e^{mt} \cdot \sin(\mu t)$ avec $P(t)$ un polynôme
- ▶ trouver une solution particulière y_i à l'équation $ay' + by = f_i(t)$; pour cela :
  - chercher y sous la forme $y(t) = Q(t) \cdot e^{mt}$ si $f_i(t) = P(t) \cdot e^{mt}$; chercher y sous la forme $y(t) = Q(t) \cdot e^{mt} \cdot \cos(\mu t) + R(t) \cdot e^{mt} \cdot \sin(\mu t)$, si $f_i(t) = P(t) \cdot e^{mt} \times \cos(\mu t)$ (ou bien $\times \sin(\mu t)$) avec $Q(t)$ ou $R(t)$ des polynômes inconnus ; lorsque le second terme présente un $\cos$ ou un $\sin$, on peut également complexifier ce terme en une exponentielle complexe puis chercher une solution sous la forme $y(t) = Q(t)e^{qt}$, où $Q(t)$ est un polynôme inconnu et q est un complexe.
  - calculer $y'(t)$
  - réinjecter dans l'équation
  - procéder par identifications
- ▶ donner une solution particulière y comme somme des fonctions y_i [principe de superposition]

Exemple 12 Trouver une solution particulière à :
- $2y' - y = x^2 \cdot e^{5x} + \cos x$
- $y' + y = t \sin t$
- $y' + 2y = (t^2 + 4) \cdot e^{-2t}$?

Méthode : Comment trouver une solution particulière à l'équation $a(t) \cdot y' + b(t) \cdot y = f(t)$?

On trouve une solution particulière sur un intervalle I où la fonction a ne s'annule pas. Ensuite :
- résoudre l'équation homogène associée ; on trouve $y(t) = \kappa \cdot e^{-A(t)}$
- chercher une solution particulière sous la forme $y_1(t) = \kappa(t) \cdot e^{-A(t)}$
- calculer $y_1'(t)$
- réinjecter dans l'équation ; il ne reste que des $\kappa'(t)$
- trouver $\kappa(t)$ puis $y_1(t)$. [méthode de la variation des constantes]

Exemple 13 Trouver une solution particulière aux équations :
- $(1 + x + x^2)y' + (2x + 1) \cdot y = 4x + 2$
- $(x^2 - 1)y' + x \cdot y = 1$, sur $I =]1, +\infty[$.

Remarque 2 • Dans la résolution d'une E.D.L$_1$, il reste toujours une constante κ indéterminée. Pour tout t_0 dans I et tout y_0 dans $\mathbb{R}$, le ***problème de Cauchy*** $\begin{cases} a(t) \cdot y' + b(t) \cdot y = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ admet une seule solution, la ***condition initiale*** $y(t_0) = y_0$ déterminant entièrement la constante κ.

• S'il on veut résoudre une E.D.L$_1$ sur $\mathbb{R}$ tout entier, il faut résoudre sur les intervalles où la fonction $a(\cdot)$ ne s'annule pas, puis effectuer des raccords de solutions aux points de jonctions des différents intervalles considérés.

Exemple 14 Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$:
- $(1 + t^2)y' - ty = 3t$
- $(e^x - 1)y' + e^x y = 2$
- $xy' - 3y = 0$.

Exemple 15 [équations aux variables séparables]
Résoudre les équations suivantes :
- $y' = -\dfrac{t}{y}$
- $\exp(-x^2 + y) \cdot y' = x$
- $m \cdot \dfrac{dv}{dt} + \beta\, v^2 = m\, g$, avec $v(0) = 0$.

4.2 E.D.L$_2$ à coefficients constants

Méthode : Comment résoudre une équation de la forme $ay'' + by' + cy = 0$, avec $a \neq 0$, b et c constants ?

- poser le polynôme $P(X) = aX^2 + bX + c$
- trouver les racines (complexes) de $P(X)$
- donner les solutions :
  - si $\Delta > 0$, on a deux racines réelles : $q_1 \neq q_2$; les solutions sont :
    $$\boxed{y : t \longmapsto \kappa_1 \cdot e^{q_1 t} + \kappa_2 \cdot e^{q_2 t}, \text{ avec } \kappa_1 \text{ et } \kappa_2 \text{ dans } \mathbb{R}}$$
  - si $\Delta = 0$, on a une racine réelle double : q ; les solutions sont :
    $$\boxed{y : t \longmapsto (\kappa_1 t + \kappa_2) \cdot e^{qt}, \text{ avec } \kappa_1 \text{ et } \kappa_2 \text{ dans } \mathbb{R}}$$
  - si $\Delta < 0$, on a deux racines complexes conjuguées : $(\lambda \pm i\mu)$; les solutions sont :
    $$\boxed{y : t \longmapsto e^{\lambda t} \cdot (\kappa_1 \cdot \cos(\mu t) + \kappa_2 \cdot \sin(\mu t)), \text{ avec } \kappa_1 \text{ et } \kappa_2 \text{ dans } \mathbb{R}}$$

Méthode : Comment trouver une solution particulière à l'équation $ay'' + by' + cy = f(t)$, avec $a \neq 0$, b et c constants ?

- vérifier que $f(t)$ est une somme de termes de la forme : polynôme $\times$ exponentielle $\times$ cosinus ou sinus
- reprendre la même méthode que pour les EDL$_1$ à coefficients constants :
  - prendre y_1 de façon adaptée à $f(t)$ avec des polynômes inconnus
  - réinjecter dans l'équation
  - procéder par identifications.

Exemple 16 • Déterminer les solutions de l'équation homogène et donner la forme générale d'une solution particulière :

- $2y'' + (m+1)y' + my = \cos t - \sin(3t)e^t + t$, où $m \in \mathbb{R}$
- $y'' + 2y' + y = x^3 \cdot e^{-x} + 3e^x$
- $y'' + y = e^x$
- $y'' + 6y' + 9 = \sin 3x$
- $y'' + 6y' + 9y = \sin 3x$.

Remarque 3 Dans la résolution d'une E.D.L$_2$ à coefficients constants, il reste toujours deux constantes κ_1 et κ_2 indéterminées. Pour tout t_0 dans $\mathbb{R}$ et tout (y_0, y_0') dans $\mathbb{R}^2$, le ***problème de Cauchy*** $\begin{cases} ay'' + by' + cy = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \text{ et } y'(t_0) = y_0' \end{cases}$ admet une seule solution, la ***condition initiale*** $\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_0' \end{cases}$ déterminant entièrement les constantes κ_1 et κ_2.