Chapitre 3 : Nombres complexes, le corps $\mathbb{C}$

Table des matières

1 Propriétés algébriques

1.1 Rappels, opérations

Définition 1 On munit l'ensemble $\mathbb{R}^2$ des couples de nombres réels de deux lois de composition :
- l'addition : $(a,b)+(a',b')=(a+a',b+b')$
- la multiplication : $(a,b)\times(a',b')=(a\cdot a'-b\cdot b', a\cdot b'+a'\cdot b)$

On vérifie que les lois $+$ et $\times$ ainsi définies sont associatives, commutatives, admettent un élément neutre $(0,0)$ pour $+$ et $(1,0)$ pour $\times$ et $\times$ est distributive sur $+$.
On pose $i=(0,1)$, puis on associe à chaque couple $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, le complexe : $z=a+ib$. On remarque que $i^2=-1$.
L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$ et les nombres a et b s'appellent respectivement les parties réelle et imaginaire de z : $a=\Re e(z)$ et $b=\Im m(z)$.

Les calculs d'addition $+$ et de multiplication $\times$ ou $\cdot$ sur les nombres complexes se font de manière habituelle.

1.2 Conjugué

Définition 2 Pour tout complexe $z=a+ib$, on définit le ***conjugué de*** z noté $\overline{z}$ par : $\overline{z}=a-ib$.

Méthode : Comment calculer les parties réelle ou imaginaire d'un quotient $\dfrac{z}{z'}$?
- ▶ multiplier le dénominateur par l'expression conjuguée : le dénominateur devient réel
- ▶ faire le calcul sur l'expression transformée.

Exemple 1 Calculer la partie réelle de $\dfrac{1+2i}{-1+3i}$ et la partie imaginaire de $(1+i\sqrt{3})^n$.

Proposition 1 On a :
- $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$ et $\overline{z\times z'}=\overline{z}\times\overline{z'}$
- pour $z\in\mathbb{C}^*$, $\overline{\dfrac{1}{z}}=\dfrac{1}{\overline{z}}$
- $\forall z\in\mathbb{C}$, $\Re e(z)=\dfrac{1}{2}(z+\overline{z})$ et $\Im m(z)=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}(z-\overline{z})$
- $\forall z\in\mathbb{C}$, $z\cdot\overline{z}\in\mathbb{R}_+$.

Méthode : Comment montrer qu'un complexe est réel, ou imaginaire pur ?
- ▶ comparer z à $\overline{z}$
- ▶ si $z=\overline{z}$, alors z est réel ; si $z=-\overline{z}$, alors z est imaginaire pur.

1.3 Module

Définition 3 On appelle ***module de*** z, le nombre $|z|=\sqrt{z\overline{z}}$.

Remarque 1 Calculer le module ou la valeur absolue d'un nombre réel (qui est en fait un nombre complexe) revient au même : le module ***prolonge*** la valeur absolue à l'ensemble $\mathbb{C}$ tout entier.

Proposition 2 • $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| = \sqrt{\Re e(z)^2 + \Im m(z)^2} \in \mathbb{R}_+$

- $\forall z \in \mathbb{C}, \quad |z| = 0 \iff z = 0$
- $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2, \quad |z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$ et $|\overline{z}| = |z|$
- $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ \left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$
- $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2, \quad |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$ et l'égalité a lieu si et seulement si il existe $\rho \in \mathbb{R}_+$ tel que : $z = \rho \cdot z'$ ou $z' = \rho \cdot z$. (on dit que z et z' sont positivement liés)

2 Groupe unimodulaire $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1

2.1 Présentation

Définition 4 On définit ***le groupe unimodulaire*** noté $\mathbb{U}$ par l'ensemble des nombres complexes de module égal à 1 :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \overline{z} = \frac{1}{z}\right\}.$$

2.2 Exponentielle d'un nombre complexe

Définition 5 Pour tout nombre complexe z, on note :

$$e^z = e^{\Re e(z)} \cdot \Big(\cos(\Im m(z)) + \mathrm{i}\sin(\Im m(z))\Big),$$

où la première exponentielle appliquée à $\Re e(z)$ est la fonction exponentielle que l'on connaît pour les nombres réels.

Théorème 1 On a :

- $\forall \theta \in \mathbb{R},\ e^{i\theta} \in \mathbb{U}$
- tout nombre complexe z de module 1 est de la forme $z = e^{i\theta}$ pour un certain θ dans $\mathbb{R}$
- pour tous z et z' dans $\mathbb{C}$, alors $e^z \times e^{z'} = e^{z+z'}$.

Corollaire 1 (Formules de Moivre et d'Euler)
On a :

- $\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta$
- $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

2.3 Applications à la trigonométrie

2.3.1 Comment retrouver des formules de trigonométrie ?

Méthode : Comment exprimer $\cos(n\theta)$ ou $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ ou $\sin\theta$?

- ▶ appliquer la formule du binôme de Newton à $a = \cos\theta$ et $b = i\sin\theta$
- ▶ prendre la partie réelle (ou imaginaire) dans cette expression pour avoir une formule pour $\cos(n\theta)$ ou pour $\sin(n\theta)$.

Méthode : Comment linéariser $\cos^n\theta$ ou $\sin^n\theta$?

- appliquer la formule d'Euler pour $\cos\theta$ ou $\sin\theta$
- appliquer la formule du binôme de Newton
- regrouper les termes de la somme deux par deux par expressions conjuguées.

Exemple 2 • Exprimer $\sin 5t$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$.
• Linéariser $\sin^5 x$.

Méthode : Comment calculer une somme de cosinus ou de sinus ?

- poser chaque cosinus (resp. chaque sinus) comme partie réelle (resp. imaginaire) d'un certain complexe
- calculer la somme de ces complexes par une formule (du binôme ou géométrique)
- prendre la partie réelle (resp. imaginaire) dans la formule trouvée.

Exemple 3 Démontrer la formule : $\forall\theta\in\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z},\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}} - \frac{1}{2}$.

2.3.2 Formules de trigonométrie à connaître

Proposition 3 Pour tous a et b dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\cos(a+b) = \cos a\cdot\cos b - \sin a\cdot\sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a\cdot\cos b + \sin a\cdot\sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a\cdot\cos b + \sin b\cdot\cos a$$

$$\sin(a-b) = \sin a\cdot\cos b - \sin b\cdot\cos a$$

2.3.3 Formules de trigonométrie à savoir retrouver

Proposition 4 Pour tous p et q dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cdot\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\cdot\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cdot\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cdot\sin\frac{p-q}{2}$$

Là où cela est bien défini en posant $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$:

$$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}\ \text{et}\ \tan\theta = \frac{2t}{1-t^2}$$

Remarque 2 De manière générale, lorsque l'on a une somme ou une différence de deux éléments de $\mathbb{U}$, il faut penser à factoriser par la demi-somme des angles (technique de l'arc moitié) :

$$\forall(\theta_1,\theta_2)\in\mathbb{R}^2,\quad e^{i\theta_1}+e^{i\theta_2}=e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\times 2\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\text{ et }e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2}=e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\times 2i\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}$$

En particulier : $e^{i\theta}+1=2\cos\frac{\theta}{2}\times e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $e^{i\theta}-1=2i\sin\frac{\theta}{2}\times e^{i\frac{\theta}{2}}$.

2.4 Équations trigonométriques

Méthode : Comment résoudre $\cos\theta=\alpha$, ou $\sin\theta=\alpha$ ou $\tan\theta=\alpha$?

- ▶ trouver une solution particulière θ_0
- ▶ donner directement les solutions :
  - $\boxed{\cos\theta=\cos\theta_0\iff\theta=\pm\theta_0\ [2\pi]}$
  - $\boxed{\sin\theta=\sin\theta_0\iff\begin{cases}\theta=\theta_0\ [2\pi]\\ \theta=\pi-\theta_0\ [2\pi]\end{cases}}$
  - $\boxed{\tan\theta=\tan\theta_0\iff\theta=\theta_0\ [\pi].}$

Méthode : Comment résoudre $a\cos\theta+b\sin\theta=c$?

- Lorsque $(a,b)=(0,0)$, si $c=0$, tout est solution et si $c\neq0$, il n'y a aucune solution.
- Lorsque $(a,b)\neq(0,0)$:
  - ▶ poser $r=\sqrt{a^2+b^2}$
  - ▶ trouver un angle θ_0 tel que $\cos\theta_0=\frac{a}{r}$ et $\sin\theta_0=\frac{b}{r}$
  - ▶ transformer l'équation selon :

$$a\cos\theta+b\sin\theta=c\iff\cos(\theta-\theta_0)=\frac{c}{r}$$

  - ▶ distinguer le cas $\left|\frac{c}{r}\right|>1$ où il n'y a aucune solution et le cas $\left|\frac{c}{r}\right|\leqslant1$ pour se ramener à une équation du type $\cos\Theta=\cos\Theta_0$.

Exemple 4 • Résoudre l'équation $\cos(2x)-\sin(2x)=1$, d'inconnue $x\in\mathbb{R}$.
• Résoudre l'équation $\sqrt{3}\sin(3x)+\cos(3x)=1$, d'inconnue $x\in\mathbb{R}$.

3 Arguments d'un nombre complexe

Définition 6 Étant donné un nombre complexe $z\neq0$, on appelle ***un argument de*** z tout nombre réel θ tel que $e^{i\theta}=\frac{z}{|z|}$. Par abus de notation, un argument de z est noté $\arg z$. En fait, si θ_0 est un argument de z, tous les arguments sont $\theta_0+2k\pi$, pour k décrivant $\mathbb{Z}$.

Définition 7 On appelle ***argument principal*** de z le seul argument de z qui appartient à $]-\pi,\pi]$.

Remarque 3 Tout nombre complexe $z\neq0$ peut s'écrire d'une unique façon sous la forme :

$$z=r\cdot e^{i\theta}\quad,\text{ où }(r,\theta)\in\mathbb{R}_+^*\times]-\pi,\pi].$$

Cette notation est appelée ***notation exponentielle*** : elle est très adaptée pour calculer produits, quotients et puissances entières d'un nombre complexe.

Proposition 5 Pour tous nombres complexes z et z' dans $\mathbb{C}^*$, on a :

$$\arg(z \cdot z') = \arg z + \arg z' \quad [2\pi], \quad \arg \frac{1}{z} = -\arg z \quad [2\pi] \text{ et } \arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg z' - \arg z \quad [2\pi]$$

Exemple 5 Soit $Z \in \mathbb{C}$. Résoudre l'équation $e^z = Z$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

4 Équations algébriques dans $\mathbb{C}$

4.1 Équations $z^n = 1$, racines n-ièmes de l'unité

Définition 8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle ***racines n-ièmes de l'unité*** les nombres complexes z tels que $z^n = 1$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

Théorème 2 L'ensemble $\mathbb{U}_n$ contient exactement n éléments qui sont :

$$\mathbb{U}_n = \left\{\omega_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}},\ k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{\omega_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}},\ k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}\right\}$$

Exemple 6 On a :

$$\mathbb{U}_1 = \{1\},\ \mathbb{U}_2 = \{-1, 1\},\ \mathbb{U}_3 = \left\{1, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{4i\pi}{3}}\right\} \text{ et } \mathbb{U}_4 = \{1, -1, i, -i\}.$$

On note dans toute la suite le nombre complexe $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

4.2 Équations $z^n = a$

Méthode : Comment résoudre une équation de la forme $z^n = a$?

- trouver une solution particulière z_0 en calculant $a = r \cdot e^{i\theta}$
- donner directement toutes les solutions $z = z_0 \times e^{2ik\pi/n}$, pour k entre 0 et $(n-1)$.

Exemple 7 Déterminer les racines 5-ièmes de $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}(1 - \mathrm{i}\sqrt{3})$.

4.3 Cas particulier : équations $z^2 = a$

Méthode : Comment résoudre une équation de la forme $z^2 = a$?

- si on peut mettre a sous la forme $a = r \cdot e^{i\theta}$, se reporter à la méthode précédente.
- sinon,
  - poser $a = \alpha + i\beta$ avec α et β réels
  - poser l'inconnue $z = x + iy$ avec x et y réels
  - élever z au carré puis identifier parties réelle et imaginaire
  - rajouter l'équation : $|z|^2 = |a|$
  - calculer x^2 et y^2
  - utiliser une équation pour avoir les signes entre x et y.

Exemple 8 Déterminer les racines carrées de $\Delta = -15 + 8\mathrm{i}$.

4.4 Équations du second degré

Méthode : Comment résoudre $az^2 + bz + c = 0$ lorsque $a \neq 0$?

- calculer le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$
- trouver une solution δ_0 à l'équation : $\delta^2 = \Delta$ (méthode précédente)
- donner les solutions de $az^2 + bz + c = 0$: $z = \dfrac{-b \pm \delta_0}{2a}$.

Exemple 9 • Résoudre l'équation : $z^2 - 2\mathrm{i}z - 1 + 2\mathrm{i} = 0$.
• Résoudre l'équation : $2\mathrm{i}z^2 - 3z - 1 - 3\mathrm{i} = 0$.

5 Interprétation géométrique des nombres complexes

5.1 Affixe d'un point, module et argument d'un complexe

Définition 9 On munit le plan $\mathscr{P}$ d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. À tout nombre complexe z, on peut associer le seul point M du plan $\mathscr{P}$ de coordonnées $(\Re e(z), \Im m(z))$. Ce point sera noté $M(z)$. Réciproquement, à tout point M du plan $\mathscr{P}$, on peut lui associer le couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ de ses coordonnées et ainsi définir le nombre complexe $z = x + iy$. Ce nombre complexe sera appelé ***l'affixe du point*** M.

Proposition 6 On dispose des propriétés suivantes :
• pour tous $A(a)$ et $B(b)$ dans le plan , la longueur AB vaut $|b - a|$
• pour tous points $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$ du plan tels que $A \neq B$ et $C \neq D$, alors l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ vaut $\arg\left(\dfrac{d-c}{b-a}\right)$.

Exemple 10 Soient a et b deux nombres complexes différents.
• Déterminer géométriquement l'ensemble des complexes z tels que la quantité $\dfrac{z-a}{z-b}$ soit un nombre réel positif.

• Déterminer géométriquement l'ensemble des complexes z tels que la quantité $\dfrac{z-a}{z-b}$ soit un nombre réel négatif.
• Déterminer géométriquement l'ensemble des complexes z tels que la quantité $\dfrac{z-a}{z-b}$ soit un nombre imaginaire pur de partie imaginaire positive.
• Déterminer géométriquement l'ensemble des complexes z tels que la quantité $\dfrac{z-a}{z-b}$ soit un nombre imaginaire pur de partie imaginaire négative.

Définition 10 Pour $a \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+$, on appelle ***disque ouvert de centre*** a ***et de rayon*** r l'ensemble : $D(a,r) = \Big\{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < r\Big\}$.
On appelle ***disque fermé de centre*** a ***et de rayon*** r l'ensemble : $\overline{D(a,r)} = \Big\{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| \leqslant r\Big\}$.

5.2 Interprétations géométriques de transformations complexes

5.2.1 Applications $z \longmapsto a \cdot z + b$

Méthode : Comment interpréter une transformation de la forme $f : z \longmapsto a \cdot z + b$?

- ▶ si $a = 1$, la fonction f est la translation de vecteur d'affixe b.
- ▶ sinon,
  - mettre a sous forme exponentielle : $a = r \cdot e^{i\theta}$
  - trouver un point fixe ω en résolvant $z = a \cdot z + b$
  - la fonction f est la similitude de centre $\Omega(\omega)$, de rapport d'homothétie r et d'angle de rotation θ.

Exemple 11 Interpréter géométriquement l'application $z \longmapsto (1+\mathrm{i})z + 2$.

5.2.2 Application $z \longmapsto \pm\overline{z}$

Proposition 7 • L'application $z \longmapsto \overline{z}$ est la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.
• L'application $z \longmapsto -\overline{z}$ est la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.