Chapitre 20 :
Fonctions de deux variables
Différentiabilité

Table des matières

1 Topologie dans $\mathbb{R}^2$ 2
- 1.1 Ensembles ouverts, fermés . . . 2
- 1.2 Continuité des fonctions . . . 3

2 Différentielle d'une fonction numérique 4
- 2.1 Notations de Landau de négligeabilité . . . 4
- 2.2 Différentielle d'une fonction, dérivées partielles . . . 4
- 2.3 Gradient . . . 5
- 2.4 Règle de la chaîne . . . 5

3 Extréma locaux ou globaux d'une fonction de deux variables 8
- 3.1 Définitions . . . 8
- 3.2 Méthode de recherche d'extréma locaux . . . 8

1 Topologie dans $\mathbb{R}^2$

1.1 Ensembles ouverts, fermés

On munit l'espace $\mathbb{R}^2$ de la norme habituelle euclidienne :

$$\|\cdot\| : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \sqrt{x^2+y^2} \end{array} \right.$$

issue du produit scalaire habituel tel que la base canonique soit une base orthonormée.

Définition 1 Soit $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments dans $\mathbb{R}^2$ puis ℓ un autre élément de $\mathbb{R}^2$.
On dit que ***la suite*** v ***converge vers*** ℓ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \|v_n - \ell\| \leqslant \varepsilon.$$

Définition 2 On rappelle que si $u \in \mathbb{R}^2$ et si ρ est un réel strictement positif, alors :
$\longrightarrow$ la ***boule ouverte de centre*** u ***et de rayon*** ρ est l'ensemble :

$$\overset{\circ}{D}(u,\rho) = \Big\{ v \in \mathbb{R}^2 \mid |v-u\| < \rho \Big\};$$

$\longrightarrow$ la ***boule fermée de centre*** u ***et de rayon*** ρ est l'ensemble :

$$\overline{D}(u,\rho) = \Big\{ v \in \mathbb{R}^2 \mid |v-u\| \leqslant \rho \Big\}.$$

On dit qu'une partie U de $\mathbb{R}^2$ est ***ouverte***, si :

$$\forall u \in U,\ \exists r > 0,\ \overset{\circ}{D}(u,r) \subset U.$$

On dit qu'une partie F de $\mathbb{R}^2$ est ***fermée***, si pour toute suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à éléments dans F qui converge, alors la limite $\ell = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} v_n$ appartient encore à F.

Proposition 1 Voici quelques propriétés :

- En notant (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$, puis (e_1^*, e_2^*) la base duale canonique, pour toute suite $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et pour tout élément ℓ de $\mathbb{R}^2$, on a équivalence entre les deux points suivants :
  $\longrightarrow$ la suite v converge vers ℓ
  $\longrightarrow$ on a :
  $$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} e_1^*(v_n) = e_1^*(\ell) \\ \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} e_2^*(v_n) = e_2^*(\ell) \end{array} \right. .$$
- Si A est une partie de $\mathbb{R}^2$, on a l'équivalence :
  $$A \text{ est ouvert} \iff \text{le complémenaire de } A \text{ est fermé.}$$
- L'ensemble $\mathscr{C}$ des suites convergentes est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$ de dimension infinie et l'application :
  $$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{C} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ v & \longmapsto & \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} v_n \end{array} \right.$$
  est linéaire.
- Toute suite bornée dans $\mathbb{R}^2$ admet au moins une valeur d'adhérence.

Exemple 1 • Toute boule ouverte est un ensemble ouvert. Toute boule fermée est un ensemble fermé.

• Une réunion d'ensembles ouverts est encore un ouvert. Une intersection d'ensembles fermés est encore un fermé.

• Une intersection finie d'ensembles ouverts est encore un ouvert. Une réunion finie d'ensembles fermés est encore un fermé.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les ensembles $\Omega_n = \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$ et $F_n = \left[\frac{1}{n}, 1\right]$ sont respectivement des ouverts et des fermés de $\mathbb{R}$, mais l'ensemble $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \Omega_n$ n'est pas un ouvert et l'ensemble $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} F_n$ n'est pas un fermé.

• Les seules parties de $\mathbb{R}^2$ à la fois ouvertes et fermées sont $\emptyset$ et $\mathbb{R}^2$.

1.2 Continuité des fonctions

Définition 3 Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie quelconque de $\mathbb{R}^2$.
Soit a un élément de U.
On dit que la ***fonction f est continue en*** a si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists r > 0,\ \forall u \in U,\ \|u - a\| \leqslant r \Longrightarrow |f(u) - f(a)| \leqslant \varepsilon.$$

On dit que la ***fonction f est continue sur*** U si la fonction f est continue en tout point a de U.

Proposition 2 Voici les premières propriétés relativement à la continuité :

- $\boxed{\text{caractérisation séquentielle de la continuité}}$
  Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Alors les deux points suivants sont équivalents :
  $\longrightarrow$ la fonction f est continue sur U
  $\longrightarrow$ pour toute suite $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans U et convergente de limite ℓ, alors la suite réelle $(f(v_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(\ell)$.
- L'ensemble $C^0(U, \mathbb{R})$ des fonctions continues $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ forme un espace vectoriel ;
- Si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues, alors la composée $\varphi \circ f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ reste continue ;
- Les formes linéaires e_1^* et e_2^* sont continues sur $\mathbb{R}^2$;
- $\boxed{\text{théorème des bornes atteintes}}$
  Toute fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur un ensemble U fermé et borné est bornée et atteint ses bornes.

Exemple 2 • Montrer que les applications

$$f : \left| \begin{array}{ccc}]0, +\infty[\times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \ln x + \sin\left(\dfrac{y}{x^2 + y^2}\right) \end{array} \right. \quad \text{et } g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \dfrac{\cos(xy) + \exp(-x^2 + y^3)}{1 + x + x^2 + y^4 \sin^2(x^2 y)} \end{array} \right.$$

sont continues.

• Montrer que la fonction

$$f : \left| \begin{array}{ccc} D(0,1) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \exp\Big(x + \cos(2x + 5y)\Big) - \ln(2 + x + y^3) \end{array} \right.$$

est bornée.

• La fonction :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, \text{ si } x = y = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

est-elle continue ?

• Montrer que la fonction $f : (x, y) \longmapsto \dfrac{\sin(xy)}{xy}$ se prolonge par continuité sur $\mathbb{R}^2$.

2 Différentielle d'une fonction numérique

2.1 Notations de Landau de négligeabilité

Si U est une partie de $\mathbb{R}^2$ telle que le point $(0,0)$ soit adhérent à la partie U – autrement dit, il existe une suite d'éléments de U convergeant vers $(0,0)$ – si $\varepsilon : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction définie sur U, on notera :

- $\varepsilon(h) = \circ(1)$ pour signifier :

$$\lim_{h \longrightarrow (0,0)} \varepsilon(h) = 0$$

- $\varepsilon(h) = \circ\Big(\|h\|\Big)$ pour signifier :

$$\lim_{h \longrightarrow (0,0)} \frac{\varepsilon(h)}{\|h\|} = 0.$$

Si U est une partie quelconque de $\mathbb{R}^2$ et si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction quelconque, si a appartient à U, alors la fonction f est continue en 0 si et seulement si la fonction f ***admet un développement limité à l'ordre*** 0 ***en*** a :

$$f(a+h) = f(a) + \circ(1) \quad \text{sous entendu lorsque } h \text{ tend vers } (0,0) \text{ et } a+h \in U$$

2.2 Différentielle d'une fonction, dérivées partielles

Définition 4 Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie U ouverte de $\mathbb{R}^2$. Soit a un élément de U. On dit que la fonction f est ***différentiable en*** a s'il existe une forme linéaire $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + \circ\Big(\|h\|\Big), \text{ lorsque } h \text{ est au voisinage de } (0,0).$$

Dans ce cas, la forme linéaire $L \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ est unique et s'appelle la ***différentielle de*** f ***en*** a et notée :

$$L = df(a).$$

Ainsi, l'égalité :

$$f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + \circ\Big(\|h\|\Big)$$

peut être vue comme le ***développement limité à l'ordre*** 1 ***en*** a ***de la fonction*** f.

On dit que la fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est ***différentiable sur*** U ou simplement ***différentiable***, si elle est différentiable en tout point a de U.

Proposition 3 • Toute application linéaire $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et :

$$\forall a \in \mathbb{R}^2,\ df(a) = f.$$

• Toute fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable sur un ouvert est continue sur cet ouvert.
• Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Pour toutes fonctions différentiables $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et pour tout scalaire λ, la fonction $\lambda \cdot f + g$ reste différentiable et :

$$\forall a \in U,\ d(\lambda \cdot f + g)(a) = \lambda \cdot df(a) + dg(a).$$

• Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, a un élément de U puis $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable en a. En posant $a = (a_1, a_2)$, alors les applications partielles $f_1 : x \longmapsto f(x, a_2)$ et $f_2 : y \longmapsto f(a_1, y)$ sont définies respectivement sur un voisinage de a_1 et su un voisinage de a_2 et dérivables respectivement en a_1 et a_2. On note dans ce cas $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a) = \partial_1 f(a)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a) = \partial_2 f(a)$ les valeurs de $f_1'(a_1)$ et $f_2'(a_2)$, les ***dérivées partielles de la fonction*** f ***en*** a.
Ainsi, en notant (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(a+te_1) - f(a)}{t} = df(a)(e_1)$$

et :
$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(a+te_2)-f(a)}{t} = df(a)(e_2).$$
On obtient donc la formule de la différentielle de f en fonction des dérivées partielles :
$$df(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot e_1^* + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot e_2^*$$
et du développement limité :
$$f(a_1+h_1, a_2+h_2) = f(a_1,a_2) + \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot h_2 + \circ\Big(\|(h_1,h_2)\|\Big).$$

• Si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction différentiable en un point a de l'ouvert U, si v est un vecteur dans $\mathbb{R}^2$, alors la ***dérivée en*** a ***de la fonction*** f ***selon le vecteur*** v est la quantité :
$$df(a)(v) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t}.$$

• Si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ admettant en tout point $a \in U$ des dérivées partielles $\partial_1 f(a)$ et $\partial_2 f(a)$ qui sont continues en a, alors la fonction f est différentiable sur U.

Exemple 3 • Montrer que la fonction $f : (x,y) \longmapsto e^{x^2+2y} \cdot \sin(x+3y)$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et calculer la différentielle de cette fonction f en tout point de $\mathbb{R}^2$.

• Quelles sont les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiables telles que la différentielle $df(a)$ ne dépend pas du point a choisi dans $\mathbb{R}^2$?

2.3 Gradient

Définition 5 Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, puis a un élément de U. On suppose que la fonction f est différentiable en U. On appelle ***gradient de*** f ***en*** a en on nota $\nabla f(a)$, le vecteur :
$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a)\right).$$
Par conséquent, en notant $(\ \mid\ )$ le produit scalaire habituel sur $\mathbb{R}^2$,
$$\forall h \in \mathbb{R}^2,\ df(a)(h) = \Big(\nabla f(a) \mid h\Big).$$

2.4 Règle de la chaîne

Proposition 4 Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, puis $a \in U$ et $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\psi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables en a. On considère enfin une fonction $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur un ouvert V contenant $b = (\varphi(a), \psi(a))$ et différentiable en b.
Alors,

- la fonction $g : (x,y) \longmapsto f\Big(\varphi(x,y), \psi(x,y)\Big)$ est définie sur un voisinage de a
- la fonction g est différentiable en a et :
$$dg(a) = df(\varphi(a), \psi(a)) \circ \Big(d\varphi(a), d\psi(a)\Big).$$
- On dispose de la ***règle de la chaîne*** :
$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial g}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial \varphi} \times \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial \psi} \times \dfrac{\partial \psi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial \varphi} \times \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial \psi} \times \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \end{array}\right. .$$

- En particulier, si $\gamma : t \longmapsto \gamma(t) = (x(t), y(t))$ est un arc paramétré défini d'une partie I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction différentiable définie sur un ouvert U contenant $\gamma(I)$, alors :

$$\forall t \in I, \ \frac{df(\gamma(t))}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t)) \cdot y'(t).$$

Méthode : comment résoudre une équation aux dérivées partielles ?

Étant donnée une équation aux dérivées partielles concernant une fonction $f : \mathscr{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 définie sur un ouvert $\mathscr{U}$

- on donne en général un changement de variable de la forme $\begin{cases} u = \varphi(x, y) \\ v = \psi(x, y) \end{cases}$
- vérifier que ce changement de variable est C^1-difféomorphe ; autrement dit, les fonctions φ et ψ doivent être de classe C^1 et le changement doit être bijectif avec des formules de la forme :

$$\begin{cases} x = \rho(u, v) \\ y = \chi(u, v) \end{cases},$$

  les fonctions ρ et χ étant encore de classe C^1
- poser la nouvelle fonction inconnue $g(u, v) = f(x, y)$ – sous entendu $g : (u, v) \longmapsto f(\rho(u, v), \chi(u, v))$ ou encore $f : (x, y) \longmapsto g(\varphi(x, y), \psi(x, y))$
- utiliser la règle de la chaîne sous la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial g}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$

- obtenir une équation aux dérivées partielles plus simple en la fonction g
- utiliser les techniques d'équations différentielles pour résoudre en les variables u et v et trouver les solutions g
- obtenir finalement les solutions de l'EDP initiale en la fonction f.

Exemple 4 • Résoudre l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}, \text{ sur } \mathbb{R}^2$$

en utilisant le changement de variable $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$.

- Résoudre l'équation aux dérivées partielles :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + 2xy(2xy + 1)f = e^{-xy}xy(2x^2y^2 + 6xy + 1), \text{ sur }]0, +\infty[^2$$

en utilisant le changement de variable $\begin{cases} x = \sqrt{uv} \\ y = \sqrt{\dfrac{u}{v}} \end{cases}$.

Définition 6 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On dit qu'une fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est ***de classe*** C^1 si la fonction f est différentiable sur l'ouvert U et si les deux dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x} : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} : U \longrightarrow \mathbb{R}$ sont continues sur U.

Exemple 5 • La fonction $f : (x, y) \longmapsto \dfrac{e^{x-y}}{1 + \operatorname{ch}(x + y^2)}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

• L'ensemble des fonctions de classe C^1 sur un ouvert U est une sous-algèbre de l'algèbre des fonctions $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$.

Méthode : comment calculer le plan à une surface du type $z = f(x, y)$? ?

Étant donnée une fonction $f : \mathscr{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur une partie de $\mathbb{R}^2$, la fonction f étant différentiable, si $M_0(x_0, y_0, z_0)$ est un point de la surface $\mathscr{S}$ d'équation :

$$z = f(x, y),$$

pour calculer une équation cartésienne du plan tangent au point M_0, le gradient de f au point M_0 étant non nul :

- calculer le gradient $\nabla f(x_0, y_0) = (\alpha, \beta)$
- interpréter le plan tangent comme l'ensemble des points M de l'espace vérifiant :

$$\left(\overrightarrow{M_0M} \mid (\alpha, \beta, -1)\right) = 0$$

- former ainsi l'équation cartésienne du plan :

$$z - z_0 = \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0).$$

Méthode : comment déterminer une droite normale en un point à une ligne de niveau ?

Étant donnée une fonction $f : \mathscr{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable sur un ouvert, un réel $\alpha \in \mathbb{R}$, un point $a = (x_0, y_0)$ de la ligne de niveau $\mathscr{L}_\alpha = \{f = \alpha\}$, en supposant la différentielle $df(a)$ non nulle,

- calculer le gradient $\nabla f(a) = (\alpha, \beta)$
- utiliser le fait que la droite normale au point a à la ligne de niveau $\mathscr{L}_\alpha$ est la droite passant par le point a et dirigée par le vecteur (α, β)
- utiliser le déterminant pour exploiter la colinéarité de vecteurs du plan : la droite normale voulue est l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\det(\overrightarrow{M_0M}, \nabla f(a)) = 0$$

- donner une équation de droite :

$$\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) = 0.$$

Exemple 6 • Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. Soit (x_0, y_0) un point de U. On pose $z_0 = f(x_0, y_0)$. Alors, la surface d'équation :

$$z = f(x, y)$$

présente un plan tangent au point (x_0, y_0, z_0) et le gradient $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ est un vecteur (dans $\mathbb{R}^3$) orthogonal à ce plan tangent.

• Déterminer une équation du plan tangent à la surface :

$$z = x^2 - y^2$$

au point $(1, 2, -3)$.

• À quoi ressemblent les lignes de niveau de la fonction :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x^2 - 2y^2 \end{array} \right. ?$$

Si λ est non nul et si $f(x_0, y_0) = \lambda$, comment calculer la droite normale à la ligne de niveau $f(x, y) = \lambda$ au point (x_0, y_0) ?

• Déterminer la droite normale à l'ellipse d'équation :

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 2,$$

au point $(-1, 2)$.

3 Extréma locaux ou globaux d'une fonction de deux variables

3.1 Définitions

Définition 7 Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit a un élément de A.
On dit que a est un ***maximum local pour la fonction*** f s'il existe $r > 0$ tel que :

$$\forall h \in \mathbb{R}^2,\ \Big[\|h\| \leqslant r \text{ et } a + h \in A\Big] \Longrightarrow f(a+h) \leqslant f(a).$$

On dit que a est un ***maximum global pour la fonction*** f si :

$$\forall u \in A,\ f(u) \leqslant f(a).$$

On obtient des définitions intuitives pour ***minimum local*** et ***minimum global*** en échangeant le signe de comparaison.
On parle d'***extrémum local*** pour désigner un maximum local ou un minimum local et on parle d'***extrémum global*** pour désigner un maximum global ou un minimum global.

3.2 Méthode de recherche d'extréma locaux

Définition 8 Soient $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, puis a un élément de U.
On dit que a est un ***point critique de la fonction*** f si $df(a) = 0$ ou de manière équivalente :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0.$$

Proposition 5 • Si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction différentiable sur un ouvert U, si a est un extrémum local de la fonction f, alors a est un point critique de la fonction f.
La réciproque est fausse.
• $\boxed{\text{théorème des bornes atteintes}}$
Si $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue définie sur un ensemble K fermé et borné de $\mathbb{R}^2$ (on dit que l'ensemble K est ***compact***), alors la fonction f est bornée et atteint ses bornes.

Méthode : comment déterminer les extréma locaux d'une fonction de deux variables ?

Pour déterminer les extréma locaux d'une fonction $f : \mathscr{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable

- si l'ensemble $\mathscr{U}$ est compact, utiliser le théorème des bornes atteintes pour avoir des extréma globaux
- utiliser le fait que dans l'intérieur de $\mathscr{U}$, chaque extrémum local est un point critique
- trouver les points critiques sur l'intérieur de $\mathscr{U}$ en résolvant un système de deux équations à deux inconnues $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$
- pour chaque point critique a, étudier localement en a la fonction f en procédant à un développement limité à deux variables ; on obtient ainsi les extréma locaux de la fonction f sur l'intérieur de $\mathscr{U}$
- étudier la fonction f sur le bord $\partial\mathscr{U}$;
  - ▷ paramétrer ce bord à l'aide d'un seul paramètre t par exemple ; on note $\gamma : I \longrightarrow \partial\mathscr{U}$ un tel paramétrage de classe C^1
  - ▷ étudier la fonction $g : t \longmapsto f(\gamma(t))$ qui est dérivable sur la partie I de $\mathbb{R}$
  - ▷ utiliser le fait que si $\alpha \in I$ est un point vérifiant $g'(\alpha) = 0$ et $g''(\alpha) \neq 0$, alors le point α est un extrémum local pour la fonction g, avec un maximum local lorsque $g'(\alpha) = 0$ et $g''(\alpha) < 0$ et un minimum local lorsque $g'(\alpha) = 0$ et $g''(\alpha) > 0$
- comparer les valeurs de la fonction f en les points extrémaux sur l'intérieur ou le bord pour obtenir les extréma locaux.

Exemple 7 • Déterminer les points critiques et les extréma locaux de la fonction $f : (x, y) \longmapsto x^2 - y^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

• Déterminer les extréma locaux ou globaux de la fonction :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2 \end{array} \right. .$$

• Montrer que la fonction

$$f : \left| \begin{array}{ccc} T = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geqslant 0 \text{ et } x + y \leqslant 1\Big\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & xy(1-x-y) \end{array} \right.$$

admet un maximum global et le calculer.