Chapitre 18 :
Processus sommatoires discrets
Séries numériques

Table des matières

1 Premières notions

1.1 Définitions

Définition 1 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels ou complexes. On appelle ***série de terme général*** u_n la suite $\left(S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

La série de terme général u_n est désignée par le symbole $\sum_n u_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ associée à la série $\sum_n u_n$ s'appelle une ***somme partielle***.

Exemple 1 • La série $\sum_n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ est divergente alors que le terme général tend vers 0, lorsque n tend vers $+\infty$.

• La série $\sum_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ est exactement la suite $\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

• Pour toute suite u de nombres réels, la série $\sum_n (u_{n+1} - u_n)$ est exactement la suite $(u_{n+1} - u_0)_{n\in\mathbb{N}}$.

Dans ce cas, toutes les sommes partielles $S_N = \sum_{k=0}^{N} (u_{k+1} - u_k)$ sont des sommes télescopiques. On parle alors de ***série télescopique***.

• Pour tout $q \in \mathbb{C}$, la série $\sum_n q^n$ est appelée ***série géométrique***. Lorsque $q \neq 1$, les sommes partielles valent : $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

1.2 Vocabulaire associé aux séries

Définition 2 On adopte le même vocabulaire pour les séries que pour les suites, car une série n'est rien d'autre qu'une suite. On parlera donc de séries croissantes, décroissantes, convergentes ou divergentes.

Plus précisément, on dit qu'une série $\sum_n u_n$ est convergente si la suite des sommes partielles $\left(S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente. Dans ce cas, on appelle ***somme de la série convergente***, la valeur de cette limite qui est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Lorsque la série est convergente, on note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$, le ***reste de la série convergente***, de sorte que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = S_n + R_n.$$

Remarque 1 • Le symbole $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ désigne un nombre alors que le symbole $\sum_n u_n$ désigne une série.

• La nature convergente ou divergente d'une série $\sum_n u_n$ ne dépend pas des premiers termes. Ainsi, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ l'est.

• Pour toute série convergente, le reste R_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Proposition 1 • Pour tous entiers $0 \leqslant p < q$, on a :

$$S_q - S_p = \sum_{k=p+1}^{q} u_k.$$

• Si la série $\sum_n u_n$ est convergente, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite nulle. De manière équivalente, si le terme général u_n d'une série ne tend pas vers 0, alors la série $\sum_n u_n$ est divergente. On dit que que la série $\sum_n u_n$ ***diverge grossièrement***. La réciproque est fausse.

2 Séries à termes positifs

Proposition 2 Si $\sum_n u_n$ est une série à termes positifs ou nuls, alors la série $\sum_n u_n$ est croissante : le théorème des suites monotones s'applique donc. Plus précisément : si $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ sont deux séries à termes positifs avec $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$, alors :

- si $\sum_n v_n$ converge, alors $\sum_n u_n$ aussi et de plus :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

- si $\sum_n u_n$ diverge, alors $\sum_n v_n$ aussi.

Proposition 3 Soient $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ deux séries <u>à termes positifs</u>.

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors les deux séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ sont de même nature (ou bien toutes les deux convergentes, ou bien toutes les deux divergentes).

Proposition 4 Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et décroissante. Alors :

- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a l'encadrement : $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\, dt \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)\, dt$
- la série $\sum_n f(n)$ est convergente si et seulement si la suite $\left(\displaystyle\int_0^n f(t)\, dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Ce principe s'appelle l'***encadrement série/intégrale*** qui permet d'encadrer la surface d'un rectangle par deux aires calculables par deux intégrales.

Exemple 2 Les ***séries de Riemann*** sont les séries de la forme $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

On a la propriété suivante :

$$\text{la série de Riemann } \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ est convergente } \iff \alpha > 1.$$

3 Les séries absolument convergentes

Définition 3 On dit qu'une série $\sum_n u_n$ est ***absolument convergente*** si la série à termes positifs $\sum_n |u_n|$ est convergente.

Proposition 5 Toute série $\sum_n u_n$ absolument convergente est convergente et :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

La réciproque est fausse.

4 Les séries alternées

Définition 4 On dit qu'une série $\sum_n u_n$ de nombres réels est ***alternée*** si pour tout n, les termes u_n et u_{n+1} sont de signe contraire.

Proposition 6 Critère Spécial des Séries Alternées

Soit $\sum_n u_n$ une série de nombres réels telle que :

- la série est alternée
- le terme $|u_n|$ tend <u>en décroissant</u> vers 0.

Alors, la série $\sum_n u_n$ est convergente.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est du même signe que u_{n+1} et :

$$|R_n| \leqslant |u_{n+1}|.$$

5 Les séries de référence

5.1 Les séries de Riemann

Proposition 7 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
La série de Riemann $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

5.2 Les séries géométriques

Proposition 8 Soit $q \in \mathbb{C}$. La série géométrique $\sum_n q^n$ est convergente si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas, la somme vaut :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

5.3 La série exponentielle

Proposition 9 Soit $x \in \mathbb{R}$. La série exponentielle $\sum_n \frac{x^n}{n!}$ est convergente et la somme vaut :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

5.4 Les séries télescopiques

Proposition 10 Soit u une suite. La série télescopique $\sum_n (u_{n+1} - u_n)$ est convergente si et seulement si la suite u converge. Dans ce cas, la somme vaut :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n - u_0.$$

5.5 Premiers exemples d'étude

Méthode : Comment étudier une série ?

Soit $\sum_n u_n$ une série. Pour déterminer la nature d'une série, on se pose les questions suivantes :

- a-t-on $\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = 0$?
  - ▷ Si oui, on ne peut rien dire pour l'instant.
  - ▷ Si non, la série est divergente grossièrement.
- la série est-elle à termes positifs ?
  - ▷ Si oui, on compare u_n à une série de Riemann – pour montrer que la série diverge, on compare souvent u_n à $\frac{1}{n}$ et pour montrer que la série converge, on compare souvent u_n à $\frac{1}{n^2}$. On peut aussi prendre un équivalent de u_n pour obtenir une forme v_n plus simple avec $u_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\sim} v_n$ et on raisonne sur la série $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.
  - ▷ Si non, on raisonne sur la série à termes positifs $\sum_n |u_n|$.

    $\longrightarrow$ Si cette série est convergente, alors la série $\sum_n u_n$ est convergente.

    $\longrightarrow$ Si la série est divergente, on tente un développement asymptotique du terme général puis l'application du CSSA.

Exemple 3 Donner la nature des séries suivantes :

- série harmonique : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$;
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln^\alpha n}{n^{3/2}}$;
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{n\ln n}}{n!}$;
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{-1} - \left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)$.

Exemple 4 • Déterminer la nature des séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln n}{n\cdot\sqrt{n}}$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos n}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (e^{1/n}-1)$ ou $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \arccos\left(1-\frac{1}{n^\alpha}\right)$.

- Déterminer la nature des séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ ou $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{(-1)^n+n^\alpha}$.
- Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n} \sin\left(\pi n \exp\left(\sin\frac{1}{n}\right)\right)$.
- On pose $u_0 > 0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = -\dfrac{e^{u_n}}{n+1}$. Déterminer la nature des séries $\displaystyle\sum_{n} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n} (-1)^n u_n$.
- Montrer qu'il existe une constante γ [constante d'Euler] telle que :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \circ(1).$$

Méthode : Comment calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ d'une série convergente ?

- on fixe $n\in\mathbb{N}$
- on calcule la somme partielle $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$, en utilisant les sommes arithmétiques, géométriques, le binôme de Newton ou une somme télescopique
- on fait tendre n vers $+\infty$.

Exemple 5 • Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k+2}{3^k}$ et $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2+k-2}$.

- Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right)$.

Méthode : Comment effectuer une transformation d'Abel sur une série ?

Une transformation d'Abel est l'analogue « discret » de l'Intégration par Parties pour les intégrales. Étant donnée une série numérique donnée sous la forme $\sum_n u_n \cdot v_n$, pour effectuer une transformation d'Abel :

- interpréter l'un des facteurs comme une dérivée discrète ; par exemple, si on veut interpréter le terme u_n comme une dérivée discrète, poser
$$U_{-1} = 0 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$
de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = U_n - U_{n-1}$
- réinjecter et procéder à un changement d'indices ; pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \cdot v_k &= \sum_{k=0}^{n} (U_k - U_{k-1}) \cdot v_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} U_k \cdot v_k - \sum_{k=0}^{n} U_{k-1} \cdot v_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} U_k \cdot v_k - \sum_{k=-1}^{n-1} U_k \cdot v_{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} U_k \cdot v_k - \sum_{k=0}^{n-1} U_k \cdot v_{k+1} \\ &= U_n \cdot v_n - \sum_{k=0}^{n-1} U_k \cdot (v_{k+1} - v_k). \end{aligned}$$

Si par exemple la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et la suite $(v_n)_n$ tend en décroissant vers 0, alors la série $\sum_n u_n \cdot v_n$ est convergente.

Exemple 6 Déterminer la nature de la série $\sum_n \frac{\cos n}{n}$.

6 Les familles sommables de nombres complexes

6.1 Les familles sommables à termes positifs

Définition 5 On appelle ***demi-droite positive achevée***, l'ensemble $[0, +\infty]$.
On peut prolonger la relation d'ordre habituelle sur $\mathbb{R}_+$ par :
$$\forall (a, b) \in [0, +\infty]^2,\ a \leqslant b \iff \begin{cases} a \text{ et } b \text{ sont dans } [0, +\infty[\text{ et } a \text{ est inférieur ou égal à } b \\ b = +\infty \end{cases}$$
Dans ce cas, on dira que tout réel (positif ou non) est inférieur ou égal à $+\infty$.

On dira que toute partie A incluse dans $[0, +\infty]$ admet une borne supérieure. En effet, on dispose de deux cas de figure :

- soit la partie A est majorée dans $\mathbb{R}_+$, auquel cas, la partie A admet une borne supérieure qui est un réel τ et ce réel τ est caractérisé par :

$$\begin{cases} \forall a \in A, \ a \leqslant \tau \\ \tau \in \overline{A} \end{cases} ;$$

- soit la partie A n'est pas majorée dans $\mathbb{R}_+$, auquel cas, on dira que la borne supérieure de A vaut $+\infty$ qui reste – au sens de la définition prolongée de la relation d'ordre « $\leqslant$ » – le meilleur majorant possible pour la partie A.

On peut également prolonger les opérations d'addition sur les éléments de $[0, +\infty]$ par :

$$\forall (a, b) \in [0, +\infty]^2, \ a + b = \begin{cases} a + b \text{ , au sens habituel} \\ +\infty, \text{ si } a \text{ ou } b \text{ vaut } +\infty \end{cases} .$$

Définition 6 Soit $\mathscr{F} = (u_i)_{i \in I}$ une famille de nombres réels positifs indexée par un ensemble I quelconque. On appelle ***somme de la famille*** $\mathscr{F}$ et on note :

$$\sum_{i \in I} u_i,$$

la borne supérieure éventuellement égale à $+\infty$ de l'ensemble suivant :

$$A = \left\{ \sum_{i \in J} u_i \mid \ J \text{ est une partie } \textbf{finie} \text{ incluse dans } I \right\}.$$

La famille $\mathscr{F} = (u_i)_{i \in I}$ à termes positifs est dite ***sommable*** si la somme $\sum_{i \in I} u_i$ est finie ; autrement dit la famille $\mathscr{F}$ est sommable si il existe un majorant C tel que pour toute partie **finie** J incluse dans I, on a :

$$\sum_{i \in J} u_i \leqslant C.$$

Exemple 7 Soit $\mathscr{F} = (u_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs.
• Lorsque l'ensemble $I = \{i_1, \cdots, i_s\}$ est fini, la famille $\mathscr{F}$ est toujours sommable et :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{k=1}^{s} u_{i_k}.$$

• Lorsque l'ensemble I est égal à $\mathbb{N}$ (ou bien à $\mathbb{N}^*$), la famille $\mathscr{F}$ est sommable si et seulement si la série $\sum_n u_n$ est convergente. Dans ce cas, on a :

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \text{ , la somme de la série.}$$

• Toute sous-famille d'une famille sommable $\mathscr{F}$ à termes positifs est encore sommable et la somme de la sous-famille est toujours inférieure ou égale à la somme de la famille sommable $\mathscr{F}$ de départ.

Proposition 11 Pour toute famille $\mathscr{F} = (u_i)_{i \in I}$ sommable de réels positifs, pour toute bijection $\sigma : I \longrightarrow I$, la famille $(u_{\sigma(i)})_{i \in I}$ reste sommable et :

$$\sum_{i \in I} u_{\sigma(i)} = \sum_{i \in I} u_i.$$

Définition 7 On peut définir deux opérations sur les familles de réels positifs :

- l'addition : si $\mathscr{F} = (u_i)_{i\in I}$ et $\mathscr{G} = (v_i)_{i\in I}$ sont deux familles de réels positifs indexées par le même ensemble I, on pose :
$$\mathscr{F} + \mathscr{G} = (u_i + v_i)_{i\in I};$$
- la multiplication par un scalaire positif : si $\mathscr{F} = (u_i)_{i\in I}$ est une famille de réels positifs et si $\lambda \in [0, +\infty[$ est un réel positif, on pose :
$$\lambda \cdot \mathscr{F} = (\lambda \times u_i)_{i\in I}.$$

On garde les propriétés de loi de composition interne, d'associativité, de commutativité etc. pour ces opérations.

Théorème 1 Théorème de sommation par paquets

Soit I un ensemble quelconque et soit $\left(\mathscr{P}_j\right)_{j\in J}$ un découpage de l'ensemble I – autrement dit, la réunion des paquets $\mathscr{P}_j$ est totale et les paquets $\mathscr{P}_j$ sont deux à deux disjoints :
$$\bigsqcup_{j\in J} \mathscr{P}_j = I.$$
Soit $\mathscr{F} = (u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs. La famille $\mathscr{F}$ est sommable si et seulement si les conditions suivantes sont réalisées :

$\longrightarrow$ pour tout $j \in J$, la famille $\mathscr{G}_j = (u_i)_{i\in\mathscr{P}_j}$ est sommable ;

$\longrightarrow$ la famille $\left(\displaystyle\sum_{i\in\mathscr{P}_j} u_i\right)_{j\in J}$ est sommable.

Dans ce cas, on a la formule :
$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in\mathscr{P}_j} u_i\right).$$

Remarque : la dernière formule est toujours vérifiée pour toute famille $(u_i)_{i\in I}$ à termes positifs. Dans le cas où la famille $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable, la somme de gauche vaut $+\infty$ et l'un des termes de la somme de droite vaut aussi $+\infty$ conduisant au fait que la somme de droite vaut aussi $+\infty$.

Corollaire 1 Théorème de Fubini positif

Soient I_1 et I_2 deux ensembles quelconques. On pose $I = I_1 \times I_2$ et on considère une famille $\mathscr{F} = (u_{n,m})_{(n,m)\in I}$ de réels positifs.
La famille $\mathscr{F}$ est sommable si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées :

$\longrightarrow$ pour tout $n \in I_1$, la famille $\mathscr{G}_n = (u_{n,m})_{m\in I_2}$ est sommable ;

$\longrightarrow$ la famille $\left(\displaystyle\sum_{m\in I_2} |u_{n,m}|\right)_{n\in I_1}$ est sommable.

Dans ce cas, on a la formule :
$$\sum_{(n,m)\in I} u_{n,m} = \sum_{n\in I_1}\left(\sum_{m\in I_2} u_{n,m}\right).$$
De plus, pour tout $m \in I_2$, la famille $\mathscr{H}_m = (u_{n,m})_{n\in I_1}$ est encore sommable ainsi que la famille $\left(\displaystyle\sum_{n\in I_1} u_{n,m}\right)_{m\in I_2}$ et on a la formule d'interversion des sommes :
$$\sum_{n\in I_1}\left(\sum_{m\in I_2} u_{n,m}\right) = \sum_{(n,m)\in I} u_{n,m} = \sum_{m\in I_2}\left(\sum_{n\in I_1} u_{n,m}\right).$$

Remarque : dans les hypothèses du théorème de Fubini, on peut intervertir les rôles des indices n et m, donc des ensembles I_1 et I_2.

Exemple 8 • La famille $\mathscr{F} = \left(\dfrac{1}{x^2}\right)_{x\in\mathbb{Q}\cap[1,+\infty[}$ est-elle sommable ?

• Montrer que pour tout réel $q \in [0,1[$, la famille $(q^{n+m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et calculer la somme de cette famille.

• Pour tout $n \geqslant 1$, on note d_n le plus grand diviseur impair de l'entier n.
Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n \cdot d_n}$ est convergente et calculer la somme de cette série.

6.2 Les familles sommables à termes complexes

Définition 8 Soit $\mathscr{F} = (u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes indexée par un ensemble I.
On dit que la famille $\mathscr{F}$ est ***sommable*** si la famille de réels positifs $(|u_i|)_{i\in I}$ est sommable.

Définition 9 Pour tout nombre réel x, on appelle ***partie positive de*** x, le nombre

$$x^+ = \max\{x, 0\}$$

et on appelle ***partie négative de*** x, le nombre

$$x^- = \max\{-x, 0\}.$$

La partie négative est un nombre positif.

Proposition 12 • Pour tout nombre réel x, on a les égalités :

$$x^+ - x^- = x \text{ et } x^+ + x^- = |x|.$$

• Pour tout nombre complexe z, on a les égalités :

$$z = \left(\Re e(z)^+ - \Re e(z)^-\right) + i\left(\Im m(z)^+ - \Im m(z)^-\right).$$

• Soit $\mathscr{F} = (u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes. La famille $\mathscr{F}$ est sommable si et seulement si les quatre familles de réels positifs $\left(\Re e(u_i)^+\right)_{i\in I}$, $\left(\Re e(u_i)^-\right)_{i\in I}$, $\left(\Im m(u_i)^+\right)_{i\in I}$ et $\left(\Im m(u_i)^-\right)_{i\in I}$ sont sommables.
Dans ce cas, on a la formule :

$$\sum_{k\in I} u_k = \sum_{k\in I} \Re e(u_k)^+ - \sum_{k\in I} \Re e(u_k)^- + i\left(\sum_{k\in I} \Im m(u_k)^+ - \sum_{k\in I} \Im m(u_k)^-\right).$$

• On peut prolonger de manière intuitive les opérations d'addition et de multiplication par les scalaires sur les familles de nombres complexes. Si l'on identifie chaque famille $(u_i)_{i\in I}$ avec la fonction $f : \left|\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ k & \longmapsto & u_k \end{array}\right.$, l'ensemble des familles $(u_i)_{i\in I}$ s'identifie avec l'ensemble des fonctions $\mathscr{F}(I,\mathbb{C})$, cette identification étant compatible avec les lois $+$ et $\cdot$ sur les familles ou les fonctions.
• Soit I un ensemble quelconque.
L'ensemble $\mathscr{S}_I$ des familles sommables de nombres complexes $(u_i)_{i\in I}$ indexées par l'ensemble I forme un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathscr{F}(I,\mathbb{C})$. De plus, l'application :

$$\Phi : \left|\begin{array}{ccc} \mathscr{S}_I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (u_k)_{k\in I} & \longmapsto & \sum\limits_{k\in I} u_k \end{array}\right. \quad \text{est une forme linéaire.}$$

Théorème 2 Théorème de sommation par paquets

Soit I un ensemble quelconque et soit $\left(\mathscr{P}_j\right)_{j\in J}$ un découpage de l'ensemble I.
Soit $\mathscr{F} = (u_i)_{i\in I}$ une famille de complexes. La famille $\mathscr{F}$ est sommable si et seulement si les conditions suivantes sont réalisées :

$\longrightarrow$ pour tout $j \in J$, la famille $\mathscr{G}_j = (u_i)_{i\in\mathscr{P}_j}$ est sommable ;

$\longrightarrow$ la famille $\left(\sum_{i\in\mathscr{P}_j} |u_i|\right)_{j\in J}$ est sommable.

Dans ce cas, on a la formule :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in\mathscr{P}_j} u_i\right).$$

Corollaire 2 Théorème de Fubini

Soient I_1 et I_2 deux ensembles quelconques. On pose $I = I_1 \times I_2$ et on considère une famille $\mathscr{F} = (u_{n,m})_{(n,m)\in I}$ de complexes.
La famille $\mathscr{F}$ est sommable si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées :

$\longrightarrow$ pour tout $n \in I_1$, la famille $\mathscr{G}_n = (u_{n,m})_{m\in I_2}$ est sommable ;

$\longrightarrow$ la famille $\left(\sum_{m\in I_2} |u_{n,m}|\right)_{n\in I_1}$ est sommable.

Dans ce cas, on a la formule :

$$\sum_{(n,m)\in I} u_{n,m} = \sum_{n\in I_1}\left(\sum_{m\in I_2} u_{n,m}\right).$$

De plus, pour tout $m \in I_2$, la famille $\mathscr{H}_m = (u_{n,m})_{n\in I_1}$ est encore sommable ainsi que la famille $\left(\sum_{n\in I_1} |u_{n,m}|\right)_{m\in I_2}$ et on a la formule d'interversion des sommes :

$$\sum_{n\in I_1}\left(\sum_{m\in I_2} u_{n,m}\right) = \sum_{(n,m)\in I} u_{n,m} = \sum_{m\in I_2}\left(\sum_{n\in I_1} u_{n,m}\right).$$

Exemple 9 On considère deux ensembles I_1 et I_2 quelconques. On pose $I = I_1 \times I_2$.
Soient $\mathscr{F} = (a_n)_{n\in I_1}$ et $\mathscr{G} = (b_m)_{m\in I_2}$ deux familles de nombres complexes, ces deux familles étant non nulles.
La famille $\mathscr{H} = (a_n \times b_m)_{(n,m)\in I}$ est sommable si et seulement si les deux familles $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont sommables et dans ce cas, on a la formule :

$$\sum_{(n,m)\in I} a_n \cdot b_m = \left(\sum_{n\in I_1} a_n\right) \times \left(\sum_{m\in I_2} b_m\right).$$

Exemple 10 Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$.
Montrer la formule :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{1 - z^{2n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1 - z^{2n}}.$$

6.3 Le produit de Cauchy

Définition 10 On définit le ***produit de Cauchy*** sur les suites $u \in \mathscr{F}(\mathbb{N},\mathbb{C})$ à valeurs complexes comme suit :
pour toutes suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on pose :

$$u \times v = w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}, \text{ avec } \forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \cdot v_{n-k}.$$

Remarque : ce produit prolonge le produit connu sur les polynômes à l'ensemble des suites complexes pas à support fini.

Proposition 13 Voici les principales propriétés concernant le produit de Cauchy.

- L'ensemble $\Big(\mathscr{F}(\mathbb{N},\mathbb{C}), +, \times, .\Big)$ est une $\mathbb{C}$-algèbre commutative, intègre et de dimension infinie.
- Si les séries $\sum\limits_n u_n$ et $\sum\limits_n v_n$, sont deux séries absolument convergentes, alors la série $\sum\limits_n \left(\sum\limits_{k=0}^{n} u_k \cdot v_{n-k}\right)$ reste absolument convergente et de plus :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \times \left(\sum_{m=0}^{+\infty} v_m\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} u_k \cdot v_{n-k}\right).$$

Corollaire 3 • On définit la fonction ***exponentielle*** comme :

$$\exp : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \end{array} \right. .$$

• La fonction exponentielle vérifie :

pour tous complexes z_1 et z_2, on a la formule : $\boxed{\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \times \exp(z_2)}$

• La fonction exp est un morphisme de groupes surjectif de $(\mathbb{C}, +)$ vers $(\mathbb{C}^*, \times)$.