Chapitre 17 :

Espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens

Table des matières

1	Produit scalaire	2
1.1	Définitions	2
1.2	Norme	2
1.3	Norme euclidienne	2
1.4	Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ	3
2	Familles orthogonales, familles orthonormales	3
2.1	Définitions	3
2.2	Procédé d'orthonormalisation de SCHMIDT	4
2.3	Bases orthonormales et expression du produit scalaire	5
2.4	Orthogonal d'une partie non vide	5
3	Endomorphismes orthogonaux	6
3.1	Définition	6
3.2	Groupe orthogonal	6
4	Matrices orthogonales	6
4.1	Définition	6
4.2	Liens entre endomorphismes orthogonaux et matrices orthogonales	6
5	Géométrie vectorielle dans un espace euclidien	6
5.1	Définitions et propriétés générales	6
5.2	Distance d'un vecteur à une partie	7
5.3	Projecteurs orthogonaux, symétries orthogonales	7
5.4	Géométrie vectorielle dans $\mathbb{R}^2$	8

1 Produit scalaire

1.1 Définitions

Définition 1 Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$. Soit $\Phi : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une application. On dit que Φ est un **produit scalaire** sur E si :

- l'application Φ est **symétrique** :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \Phi(x, y) = \Phi(y, x).$$

- l'application Φ est **bilinéaire** (les applications $x \mapsto \Phi(x, y)$ et $y \mapsto \Phi(x, y)$ sont linéaires)
- l'application Φ est **définie positive** :

$$\forall x \in E, \quad \Phi(x, x) \geq 0 \text{ et } \Phi(x, x) = 0 \implies x = 0_E$$

Lorsque Φ est un produit scalaire, on notera :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \Phi(x, y) = (x | y).$$

Lorsque E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire, on dit que E est un **espace préhilbertien réel**.

Lorsque E est un espace vectoriel de dimension finie, on dit que l'ensemble $(E, (|))$ est un **espace euclidien**.

Exemple 1 • sur $\mathbb{R}^n$, $(x | y) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$

- sur $C^0([a, b], \mathbb{R})$, $(f | g) = \int_a^b f(t) \cdot g(t) dt$

- sur $\mathbb{R}[X]$, $(P | Q) = \int_0^1 P(t) \cdot Q(t) dt$

- sur $\mathbb{R}_n[X]$, $(P | Q) = \sum_{i=0}^n P(i) \cdot Q(i)$

- sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(A | B) = \text{Tr}(A^T \cdot B)$.

1.2 Norme

Définition 2 Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $N : E \rightarrow \mathbb{R}$ une application. On dit que N est une norme sur E si :

- $\forall u \in E, N(u) \geq 0$ et $N(u) = 0 \implies u = 0$
- $\forall (u, v) \in E^2, N(u + v) \leq N(u) + N(v)$ (inégalité triangulaire)
- $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda \cdot u) = |\lambda| \cdot N(u)$.

1.3 Norme euclidienne

Proposition 1 Soit $(E, (|))$ un espace préhilbertien. Alors, l'application $x \mapsto \sqrt{(x | x)}$ définit une norme sur E , appelée **norme euclidienne** associée au produit scalaire $(|)$. On notera : $\|x\| = \sqrt{(x | x)}$.

Proposition 2 On a :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x | y) + \|y\|^2.$$

1.4 Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ

Proposition 3 Soit $(E, (\cdot | \cdot))$ un espace préhilbertien. Alors, pour tous vecteurs x et y de E , on a :

$$|(x | y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

et l'égalité a lieu si et seulement si les vecteurs x et y sont colinéaires.

Corollaire 1 Soit $(E, (\cdot | \cdot))$ un espace préhilbertien. Alors, pour tous vecteurs x et y de E , on a : $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ si et seulement si les vecteurs x et y sont colinéaires et de même sens.

Exemple 2 • Pour toutes fonctions continues f et g sur $[a, b]$, on a :

$$\left| \int_a^b f(t) \cdot g(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(t) dt}.$$

• La norme euclidienne $\|\cdot\|_2$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une norme d'algèbre :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \|A \times B\|_2 \leq \|A\|_2 \cdot \|B\|_2.$$

Exemple 3 Les trois normes définies par $\|\cdot\|_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sum_{k=1}^n |x_k| \end{cases}$, $\|\cdot\|_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \end{cases}$ et $\|\cdot\|_\infty : \begin{cases} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| \end{cases}$ sont-elles des normes euclidiennes ?

2 Familles orthogonales, familles orthonormales

2.1 Définitions

Définition 3 Soit $(E, (\cdot | \cdot))$ un espace préhilbertien. Deux vecteurs x et y de E sont dits *orthogonaux* si $(x | y) = 0$.

Soit $(x_1, \dots, x_p)$ une famille à p vecteurs de E . On dit que la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est *orthogonale* si :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, p\}^2, \quad i \neq j \implies (x_i | x_j) = 0.$$

On dit que la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est *orthonormale* si :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, p\}^2, \quad (x_i | x_j) = \delta_{ij},$$

où δ_{ij} est le symbole de KRONECKER défini par : $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & , \text{ si } i \neq j \\ 1 & , \text{ si } i = j \end{cases}$

Remarque 1 • La matrice $(\delta_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice I_n .

- Un vecteur $x \in E$ est dit *unitaire* si $\|x\| = 1$.
- Une famille orthonormale est une famille orthogonale à vecteurs unitaires.

Proposition 4 Toute famille orthonormale est libre.

Exemple 4 L'ensemble E des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues et 2π -périodiques muni de :

$$(f | g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) g(t) dt$$

est un espace préhilbertien réel.

La famille $(c_n : t \mapsto \cos(nt); n \in \mathbb{N} \text{ et } s_n : t \mapsto \sin(nt); n \in \mathbb{N}^*)$ est une famille libre.

2.2 Procédé d'orthonormalisation de SCHMIDT

Théorème 1 Soit $(E, (|))$ un espace euclidien. Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille libre. Alors, il existe une unique famille orthonormale $(e_1, \dots, e_p)$ telle que :

- $\forall i \in \{1, \dots, p\}, \text{Vect}(e_1, \dots, e_i) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_i)$
- $\forall i \in \{1, \dots, p\}, (e_i | u_i) > 0$.

Méthode : Comment orthonormaliser une famille libre ?

Pour orthonormaliser une famille libre $(u_1, \dots, u_p)$ par le procédé de Gram-Schmidt dans un espace préhilbertien $(E, (|))$:

► poser $e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$

► une fois $e_1, \dots, e_k$ construits,

• poser $v_{k+1} = u_{k+1} - \sum_{j=1}^k (u_{k+1} | e_j) \cdot e_j$ [redressement de u_{k+1}]

• poser $e_{k+1} = \frac{v_{k+1}}{\|v_{k+1}\|}$ [normalisation]

De ce théorème, on en déduit les résultats très importants suivants :

Corollaire 2 Soit $(E, (|))$ un espace euclidien.

- Alors, il existe des bases orthonormales.
- Toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormale de E .

Exemple 5 • Orthonormaliser dans $\mathbb{R}^3$ habituel la famille $((1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1))$.

• Soient $a < b$ deux réels et $\omega : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue et non nulle.

1. Montrer que $(P | Q) \mapsto \int_a^b P \times Q \times \omega$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2. Déterminer l'existence d'une famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ formant une b.o.n. de $\mathbb{R}[X]$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(P_n) = n$.

3. Montrer que chaque polynôme P_n est scindé à racines simples dans $]a, b[$.

2.3 Bases orthonormales et expression du produit scalaire

Proposition 5 *théorème de PYTHAGORE* Soit $(E, (\cdot | \cdot))$ un espace euclidien. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E . Pour tous vecteurs $x = \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i \cdot e_i$ de E , on a :

- $(x | y) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$
- $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$.

2.4 Orthogonal d'une partie non vide

Définition 4 Soit $(E, (\cdot | \cdot))$ un espace préhilbertien réel. Soit A une partie non vide de E . On appelle *orthogonal de A* et on note $A^\perp$, l'ensemble de tous les vecteurs x de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs a de A :

$$A^\perp = \left\{ x \in E \mid \forall a \in A, (a | x) = 0 \right\}$$

Proposition 6 Avec les notations précédentes,

- l'ensemble $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E
- si $A \subset B$, alors $B^\perp \subset A^\perp$
- on a toujours : $A^\perp = (\text{Vect}(A))^\perp$
- si F et G sont deux sous-espaces de E , alors $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$
- si E est de dimension finie, si F est un sous-espace de E , alors $F \oplus F^\perp = E$ et $F = (F^\perp)^\perp$
- **[recollement de b.o.n.]** si E est de dimension finie, si $\mathcal{B}_1$ est une base orthonormale de F et $\mathcal{B}_2$ est une base orthonormale de $F^\perp$, alors $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base orthonormale de E
- **[découpage de b.o.n.]** si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de E et k est un entier entre 1 et n , $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ et $G = \text{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$, alors $G = F^\perp$ et $F = G^\perp$.

Exemple 6 • Si E est un espace préhilbertien réel et si F est un sous-espace de E , on a toujours l'inclusion :

$$F \subset (F^\perp)^\perp.$$

- Lorsque E est un espace euclidien et si F est un sous-espace de E , on a égalité :

$$F = (F^\perp)^\perp.$$

- Si l'on considère l'espace préhilbertien $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire :

$$(f | g) = \int_0^1 f \times g$$

et si $F = \left\{ f \in E \mid f(0) = 0 \right\}$, alors $F^\perp = \{0\}$ et donc on n'a pas égalité entre F et $(F^\perp)^\perp$.

Exemple 7 Si E est un espace euclidien, toutes les formes linéaires $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ sont de la forme $\varphi : x \mapsto (x | \vec{u})$, pour un certain vecteur $\vec{u}$. [théorème de Riesz]

3 Endomorphismes orthogonaux

3.1 Définition

Définition 5 Soient $(E, (\mid))$ un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est un endomorphisme *orthogonal* si l'une des trois assertions équivalentes suivantes est vérifiée :

- $\forall (x, y) \in E^2, (f(x) \mid f(y)) = (x \mid y)$
- $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$
- f transforme une b.o.n. en une autre b.o.n.

3.2 Groupe orthogonal

Proposition 7 Soit $(E, (\mid))$ un espace euclidien. On note $O(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E : c'est un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$ appelé *groupe orthogonal* sur E . On note $SO(E)$ l'ensemble des éléments de $O(E)$ de déterminant égal à 1 : c'est un sous-groupe de $(O(E), \circ)$ appelé *groupe spécial orthogonal* sur E .

4 Matrices orthogonales

4.1 Définition

Définition 6 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que la matrice A est *orthogonale* si $A^T \cdot A = I_n$.

Remarque 2 • Toute matrice orthogonale est inversible d'inverse : $A^{-1} = A^T$.

- La matrice A est orthogonale si et seulement si $A \cdot A^T = I_n$.
- Pour toute matrice orthogonale $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\det A = \pm 1$. La réciproque est fautive.
- On note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$ le groupe spécial orthogonal.

4.2 Liens entre endomorphismes orthogonaux et matrices orthogonales

Proposition 8 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(E, (\mid))$ un espace euclidien de dimension n , $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E . On pose $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Alors :

$$f \in O(E) \iff A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in O_n(\mathbb{R}).$$

D'autre part, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors A est une matrice orthogonale si et seulement si A est un endomorphisme orthogonal sur $\mathbb{R}^n$ habituel, si et seulement si la famille des vecteurs colonnes de la matrice A forme une b.o.n. dans l'espace euclidien habituel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont deux bases de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ habituel, si la base $\mathcal{B}$ est de plus orthonormée, en notant P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{C}$, on a équivalence entre les deux points suivants :

- la base $\mathcal{C}$ est orthonormée
- la matrice P est orthogonale.

5 Géométrie vectorielle dans un espace euclidien

5.1 Définitions et propriétés générales

Définition 7 Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire $(\cdot | \cdot)$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
 On dit que u est un **projecteur orthogonal** si u est le projecteur sur $F = \text{Im}(u)$ parallèlement à $F^\perp$.
 On dit que u est une **symétrie orthogonale** si u est la symétrie par rapport à $F = \text{Ker}(u - \text{id}_E)$ et parallèlement à $F^\perp$.

Remarque 3 • Une projection orthogonale n'est pas un endomorphisme orthogonal sauf pour l'identité.
 • Une symétrie orthogonale u correspond à une symétrie telle que : $\text{Ker}(u - \text{id}_E)^\perp = \text{Ker}(u + \text{id}_E)$.

Proposition 9 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie. Alors, la symétrie u est orthogonale si et seulement si l'endomorphisme u est orthogonal.

5.2 Distance d'un vecteur à une partie

Définition 8 Soient E un espace euclidien, $\mathcal{A}$ une partie non vide de E , puis x un vecteur de E .
 On appelle **distance du vecteur x à la partie $\mathcal{A}$** , le nombre :

$$d(x, \mathcal{A}) = \inf \left(\left\{ \|x - y\| ; y \in \mathcal{A} \right\} \right).$$

Proposition 10 Soient E un espace euclidien, $\mathcal{A}$ une partie non vide de E , puis x un vecteur de E .
 Voici les principales propriétés relatives à la distance.

- On a l'équivalence :

$$d(x, \mathcal{A}) = 0 \iff x \in \overline{\mathcal{A}}.$$

- Lorsque la partie $\mathcal{A}$ est fermée, alors la distance $d(x, \mathcal{A})$ est atteinte.
- Lorsque la partie $\mathcal{A}$ est fermée et convexe, alors la distance $d(x, \mathcal{A})$ est atteinte en un seul point de $\mathcal{A}$.
- L'application $f : \begin{cases} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & d(x, \mathcal{A}) \end{cases}$ est 1-lipschitzienne donc continue.

5.3 Projecteurs orthogonaux, symétries orthogonales

Définition 9 On dit que u est un **projecteur orthogonal** si u est le projecteur sur $F = \text{Im}(u)$ parallèlement à $F^\perp$.
 On dit que u est une **symétrie orthogonale** si u est la symétrie par rapport à $F = \text{Ker}(u - \text{id}_E)$ et parallèlement à $F^\perp$.

Définition 10 Soient F un sous-espace de E et $x_0 \in E$. On appelle **distance** de x_0 à F et on note $d(x_0, F)$ le nombre : $d(x_0, F) = \inf_{y \in F} \|x_0 - y\|$.

Méthode : Comment calculer la distance d'un vecteur à un sous-espace ?

Dans un espace euclidien E , pour calculer la distance d'un vecteur x_0 à un sous-espace F de E :

- ▶ introduire la projection orthogonale p sur F
- ▶ trouver une base $(e_1, \dots, e_r)$ de F
- ▶ calculer $p(x_0)$: pour cela :
  - poser $p(x_0) = \sum_{k=1}^r \lambda_k \cdot e_k$
  - calculer les λ_k avec les r équations $(x - p(x_0) \mid e_k) = 0$
- ▶ donner le résultat : $d(x_0, F) = \|x_0 - p(x_0)\|$.

Exemple 8 • Calculer : $\inf \left\{ \int_0^\pi (e^x - a \cdot \sin x - b \cdot \cos x)^2 dx \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

- Calculer la distance entre le vecteur $(1, 1, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$ et $F = \text{Vect}((1, 0, 2, 1), (0, 0, 3, 2))$.

Exemple 9 Soit A une matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- la matrice A est une matrice de projection orthogonale sur l'espace euclidien habituel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
- $A^2 = A$ et $A^T = A$.

5.4 Géométrie vectorielle dans $\mathbb{R}^2$

Méthode : Comment réduire une matrice dans $O_2(\mathbb{R})$?

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Pour la caractériser géométriquement :

- ▶ vérifier que $A^T \cdot A = I_2$: la matrice est bien orthogonale
- ▶ calculer $\det A$: on trouve ± 1
- ▶ si $\det A = 1$:
  - il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que : $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$
  - A est une rotation d'angle θ
- ▶ si $\det A = -1$:
  - trouver ε_1 non nul tel que $A(\varepsilon_1) = \varepsilon_1$
  - A est la symétrie orthogonale par rapport à $\text{Vect}(\varepsilon_1)$.

Exemple 10 Compléter les $\star$ pour que la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \star \\ \frac{1}{2} & \star \end{pmatrix}$ soit orthogonale. Caractériser ensuite la matrice obtenue.