

# Chapitre 16 : Intégration sur un segment

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Construction de l'intégrale de RIEMANN</b>	<b>2</b>
1.1	Subdivisions . . . . .	2
1.2	Fonctions en escalier . . . . .	2
1.3	Intégrale d'une fonction en escalier . . . . .	2
1.4	Fonctions RIEMANN-intégrables . . . . .	3
1.5	Fonctions continues par morceaux . . . . .	3
1.6	Propriétés de l'intégrale . . . . .	4
1.6.1	Linéarité de l'intégrale . . . . .	4
1.6.2	Positivité de l'intégrale . . . . .	4
1.6.3	Relation de CHASLES . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Intégrales et primitives de fonctions continues</b>	<b>5</b>
2.1	Définitions . . . . .	5
2.2	Primitives usuelles . . . . .	6
2.3	Intégration par parties (rappels) . . . . .	6
2.4	Changement de variable (rappels) . . . . .	7
2.5	Intégrale d'une fraction rationnelle . . . . .	7
2.6	Intégrale d'une fraction rationnelle en cos et sin, règles de BIOCHE . . . . .	8
2.7	Formule de TAYLOR avec reste intégral . . . . .	8

# 1 Construction de l'intégrale de RIEMANN

## 1.1 Subdivisions

**Définition 1** Soit  $[a, b]$  un segment. On appelle **subdivision**  $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$  du segment  $[a, b]$ , tout uplet de nombres tels que :

$$x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Soient  $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$  et  $\sigma' = (x'_0, \dots, x'_p)$  deux subdivisions de  $[a, b]$ . On dit que la subdivision  $\sigma$  est **plus fine** que  $\sigma'$  si  $\{x_0, \dots, x_n\} \supset \{x'_0, \dots, x'_p\}$ . Dans ce cas, on notera  $\sigma \preceq \sigma'$ .

Soit  $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$  une subdivision de  $[a, b]$ . On appelle **pas** de la subdivision  $\sigma$ , le nombre :

$$h_\sigma = \max\{x_{i+1} - x_i \mid i \in \{0, \dots, n-1\}\} > 0.$$

**Proposition 1** Si  $\sigma$  et  $\sigma'$  sont deux subdivisions de  $[a, b]$ , alors :

- il existe une subdivision plus fine que  $\sigma$  et  $\sigma'$
- si  $\sigma \preceq \sigma'$ , alors  $h_\sigma \leq h_{\sigma'}$ .

**Exemple 1** • On peut avoir  $h_\sigma \leq h_{\sigma'}$  sans que  $\sigma$  soit plus fine que  $\sigma'$  :  $\sigma = \left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$  et  $\sigma' = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)$ .

- si  $\sigma$  et  $\sigma'$  sont deux subdivisions, l'ensemble  $\{\sigma, \sigma'\}$  admet-il une borne inférieure ? une borne supérieure ?

## 1.2 Fonctions en escalier

**Définition 2** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. On dit que la fonction  $f$  est **en escalier** s'il existe une subdivision  $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$  de  $[a, b]$  telle que pour tout  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ , la restriction  $f|_{]x_i, x_{i+1}[}$  soit une fonction constante.

Dans ce cas, une telle subdivision  $\sigma$  est dite **adaptée** à la fonction en escalier  $f$ .

**Proposition 2** L'ensemble  $Esc([a, b])$  des fonctions en escaliers sur  $[a, b]$  forme une sous-algèbre de  $(\mathbb{R}^{[a, b]}, +, \times, \cdot)$

## 1.3 Intégrale d'une fonction en escalier

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction en escalier de subdivision adaptée  $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ . On choisit pour tout  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ , un nombre  $\xi_i$  dans  $]x_i, x_{i+1}[$ .

**Définition 3** On appelle **intégrale** de la fonction  $f$  sur le segment  $[a, b]$  et on note  $\int_{[a, b]} f$  ou  $\int_a^b f(x) dx$  le nombre :

$$\int_{[a, b]} f = \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \cdot (x_{i+1} - x_i).$$

Ce nombre ne dépend ni des nombres  $\xi_i$ , ni de la subdivision  $\sigma$  adaptée à la fonction  $f$ .

**Remarque 1** L'intégrale d'une fonction en escalier correspond géométriquement à l'aire algébrique des rectangles définis entre le graphe de  $f$  et l'axe des abscisses.

## 1.4 Fonctions RIEMANN-intégrables

**Définition 4** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction bornée.

On note :

- $\mathcal{E}_-$  l'ensemble des fonctions en escalier  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  telles que :  $\forall x \in [a, b], \varphi(x) \leq f(x)$
- $\mathcal{E}_+$  l'ensemble des fonctions en escalier  $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  telles que :  $\forall x \in [a, b], f(x) \leq \psi(x)$
- $\mathcal{I}_- = \left\{ \int_{[a,b]} \varphi \in \mathbb{R} \mid \varphi \in \mathcal{E}_- \right\}$  et  $\mathcal{I}_+ = \left\{ \int_{[a,b]} \psi \in \mathbb{R} \mid \psi \in \mathcal{E}_+ \right\}$
- $\tau_-(f) = \sup \mathcal{I}_-$  et  $\tau_+(f) = \inf \mathcal{I}_+$ .

On dit que la fonction  $f$  est **RIEMANN-intégrable** si  $\tau_-(f) = \tau_+(f)$ . Dans ce cas, on notera

$$\int_{[a,b]} f = \int_a^b f(x) dx = \tau_- = \tau_+.$$

**Exemple 2** • Les fonctions en escalier sont RIEMANN-intégrables.

- Donner un exemple de fonction  $f$  ne prenant qu'un nombre fini de valeurs mais n'étant pas Riemann-intégrable.

**Proposition 3** L'ensemble des fonctions RIEMANN-intégrables forme un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{[a,b]}$ , en fait une sous-algèbre commutative, non intègre et de dimension infinie de  $\mathbb{R}^{[a,b]}$ .

## 1.5 Fonctions continues par morceaux

**Définition 5** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. On dit que  $f$  est **continue par morceaux** s'il existe une subdivision  $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$  de  $[a, b]$  telle que pour tout  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ , la restriction  $f|_{]x_i, x_{i+1}[}$  soit continue et prolongeable par continuité à droite en  $x_i$  et à gauche en  $x_{i+1}$ . Une telle subdivision  $\sigma$  est dite **adaptée** à la fonction continue par morceaux  $f$ .

**Exemple 3** • Toute fonction continue sur  $[a, b]$  est continue par morceaux.

- La fonction  $x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & , \text{ si } x \in [-1, 1] \setminus \{0\} \\ 0 & , \text{ si } x = 0 \end{cases}$  n'est pas continue par morceaux sur  $[-1, 1]$ .
- On peut également parler de fonctions de classe  $C^p$  ou  $C^\infty$  par morceaux.

**Théorème 1** Toute fonction continue par morceaux sur le segment  $[a, b]$  est RIEMANN-intégrable.

**Proposition 4** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue par morceaux. Alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Ces sommes sont appelées **sommes de RIEMANN**.

### Méthode : Comment exploiter une somme de Riemann ?

Pour trouver la bonne fonction  $f$  et les bons nombres  $a$  et  $b$ , dans une somme de Riemann de  $n$  termes :

- ▶ factoriser la somme par  $n$  :  $\frac{1}{n} \sum \dots$
- ▶ à l'intérieur de la somme, mettre ensemble la variable d'indexation  $k$  et l'entier  $n$  sous la forme  $\frac{k}{n}$
- ▶ remplacer chaque  $\frac{k}{n}$  par  $x$
- ▶ trouver une fonction  $f$  telle que chaque terme soit de la forme :  $f(x)$
- ▶ prendre  $a = 0$  et  $b = 1$
- ▶ la somme de Riemann tendra vers  $\int_0^1 f(x) dx$ .

**Exemple 4** • Étudier la suite  $\left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

- Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{n^2 + k^2}$ .
- Soit  $\alpha > 0$ . Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n \sqrt{k(n-k)}$ .

## 1.6 Propriétés de l'intégrale

On peut parler de l'intégrale  $\int_a^b f(x) dx$  même si  $a > b$ . Dans ce cas, l'intégrale vaut  $-\int_b^a f(x) dx$ .

On note  $E$  l'ensemble des fonctions RIEMANN-intégrables.

### 1.6.1 Linéarité de l'intégrale

**Théorème 2** Soient  $a$  et  $b$  dans  $\mathbb{R}$ . L'application  $f \mapsto \int_a^b f(x) dx$  est une forme linéaire sur l'espace  $E$ .

### 1.6.2 Positivité de l'intégrale

**Théorème 3** Soit  $f \in E$  sur le segment  $[a, b]$ , avec  $a \leq b$ . On suppose que :  $\forall x \in [a, b], f(x) \geq 0$ . Alors :  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ .

**Corollaire 1** • Soient  $f$  et  $g$  dans  $E$  telles que :  $\forall x \in [a, b], f(x) \leq g(x)$ . Alors,  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ .

- Soit  $f \in E$ . Alors,  $|f|$  appartient à  $E$  et :

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

- Soient  $f$  et  $g$  dans  $E$ . Alors, on a l'inégalité triangulaire :

$$\left| \int_a^b (f+g)(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx + \int_a^b |g(x)| dx.$$

**Proposition 5** [théorème aux quatre hypothèses]

Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction vérifiant :

- $a < b$
- la fonction  $f$  est positive
- la fonction  $f$  est continue sur  $[a, b]$
- l'intégrale  $\int_a^b f(t) dt$  est nulle.

Alors la fonction  $f$  est la fonction nulle.

**Exemple 5** • Que dire de la fonction indicatrice  $f = \mathbf{1}_{\{1\}}$  sur  $[0, 2]$  ?

- Quels sont les polynômes  $P(X) \in \mathbb{C}[X]$  tels que  $\int_0^1 |P(t)| dt = 0$  ?

### 1.6.3 Relation de CHASLES

**Théorème 4** Soit  $f \in E$ . Soient  $a, b$  et  $c$  dans  $\mathbb{R}$ . Alors :  $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$ .

## 2 Intégrales et primitives de fonctions continues

### 2.1 Définitions

**Définition 6** On appelle *primitive* de la fonction  $f$ , toute fonction  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable sur l'intervalle  $I$  telle que  $F' = f$ .

**Théorème 5** théorème fondamental de l'analyse

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur un intervalle.

Alors pour tout  $x_0 \in I$  il existe une seule primitive de  $f$  s'annulant en  $x_0$ . Il s'agit de la fonction

$$x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

Toutes les primitives de  $f$  sont déterminées à une constante près.

**Méthode : Comment calculer une primitive d'une fonction ?**

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ . Pour en déterminer une primitive

- ▶ fixer  $x_0$  dans  $I$
- ▶ choisir  $x$  dans  $I$
- ▶ calculer l'intégrale  $\int_{x_0}^x f(t) dt$
- ▶ la formule en  $x$  est une primitive de  $f$ .

**Exemple 6** • Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  et  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que la fonction  $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et calculer sa dérivée.

- Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot \int_0^1 t^n \cdot f(t) dt = f(1).$$

## 2.2 Primitives usuelles

On dispose du tableau suivant :

- $\int u' \cdot u^\alpha = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$  avec  $\alpha \neq -1$
- $\int \frac{u'}{u} = \ln |u| + c$
- $\int u' \cdot e^u = e^u + c$
- $\int u' \cdot \ln u = u \cdot \ln u - u + c$
- $\int u' \cdot \sin u = -\cos u + c$
- $\int u' \cdot \cos u = \sin u + c$
- $\int u' \cdot \tan u = -\ln |\cos u| + c$
- $\int \frac{u'}{\cos^2 u} = \tan u + c$
- $\int u' \cdot \operatorname{sh} u = \operatorname{ch} u + c$
- $\int u' \cdot \operatorname{ch} u = \operatorname{sh} u + c$
- $\int u' \cdot \operatorname{th} u = \ln \operatorname{ch} u + c$
- $\int \frac{u'}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + c$
- $\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + c$
- $\int \frac{u'}{u^2+1} = \arctan u + c$

## 2.3 Intégration par parties (rappels)

**Méthode : Comment faire une intégration par parties ?**

- ▶ poser  $u'(x)$  l'un des termes à intégrer et  $v(x)$ , l'autre terme
- ▶ trouver  $u(x)$  et  $v'(x)$
- ▶ utiliser la formule  $\int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx$ .

**Exemple 7** • Déterminer une primitive de  $x \mapsto \ln x$ , de  $\arctan$

- Calculer  $I_n = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^n}$ .
- Calculer  $\int P(x) \cdot e^{ax} dx$ , où  $a \in \mathbb{R}^*$  et  $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ .

## 2.4 Changement de variable (rappels)

Méthode : Comment faire un changement de variable dans une intégrale ?

Pour faire le changement de variable  $t = \varphi(x)$  dans l'intégrale  $\int_a^b f(x) dx$  :

- ▶  $x$  en fonction de  $t$  :  $x = \psi(t)$
- ▶ remplacer chaque  $x$  dans  $f(x)$  par  $\psi(t)$ , puis simplifier
- ▶ remplacer  $dx$  par  $\psi'(t) dt$
- ▶ changer les bornes d'intégration pour la variable  $t$
- ▶ poser la nouvelle intégrale :  $\int_a^b f(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\psi(t)) \cdot \psi'(t) dt.$

**Exemple 8** • Calculer  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$  à l'aide du changement de variable  $x = \cos t$ .

- Calculer  $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^5 x}{1 + \cos^4 x} dx$  à l'aide du changement de variable  $t = 2\pi - x$ .

## 2.5 Intégrale d'une fraction rationnelle

Méthode : Comment calculer l'intégrale d'une fraction rationnelle ?

- ▶ faire la D.E.S de cette fraction rationnelle dans  $\mathbb{R}(X)$
- ▶ pour calculer une primitive de chaque terme, cela dépend de la teneur de chaque terme.
  - Si le terme est de la forme  $\frac{c}{X - \lambda}$ , où  $\lambda$  est réel, utiliser le fait que  $x \mapsto c \cdot \ln |x - \lambda|$  est une primitive de  $x \mapsto \frac{c}{x - \lambda}$ .
  - Si le terme est de la forme  $\frac{aX + b}{X^2 + cX + d}$ , le polynôme  $X^2 + cX + d$  n'ayant aucune racine réelle :
    - dériver le dénominateur :  $(X^2 + cX + d)' = 2X + c$
    - décomposer le polynôme  $aX + b$  sous la forme :

$$aX + b = \alpha(2X + c) + \beta,$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux constantes, avec  $\alpha = \frac{a}{2}$

- utiliser le fait que  $x \mapsto \ln |x^2 + cx + d|$  est une primitive de  $x \mapsto \frac{2x + c}{x^2 + cx + d}$
- utiliser pour la suite le fait qu'une primitive de  $x \mapsto \frac{1}{x^2 + \gamma^2}$ , où  $\gamma \neq 0$  est :

$$x \mapsto \frac{1}{\gamma} \cdot \arctan \left( \frac{x}{\gamma} \right)$$

- pour trouver une primitive de  $f : x \mapsto \frac{\beta}{x^2 + cx + d}$ , mettre le polynôme  $X^2 + cX + d$  sous forme canonique :  $X^2 + cX + d = \left(X + \frac{c}{2}\right)^2 + \left(d - \frac{c^2}{4}\right) = \left(X + \frac{c}{2}\right)^2 + \gamma^2$  puis procéder au changement de variable  $u = x + \frac{c}{2}$  pour obtenir une primitive de la fonction  $f$  sous la forme :

$$x \mapsto \frac{\beta}{\gamma} \arctan \left( \frac{x + \frac{c}{2}}{\gamma} \right).$$

**Exemple 9** • Comment calculer une primitive de  $x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^n}$  ?

- Déterminer une primitive de  $x \mapsto \frac{x}{(x+1)^2(x-3)}$ .
- Déterminer une primitive de  $x \mapsto \frac{x+1}{x^2+x+1}$ .

## 2.6 Intégrale d'une fraction rationnelle en cos et sin, règles de BIOCHE

**Méthode** : Comment intégrer une fraction rationnelle en sin et cos ?

Si  $f(x)$  est une expression rationnelle en sin et cos, on utilise les règles de Bioche :

- ▶ tester un bon changement de variable :
  - si l'expression  $f(x) dx$  est invariante en remplaçant  $x$  par  $(-x)$ , poser  $t = \cos x$
  - si l'expression  $f(x) dx$  est invariante en remplaçant  $x$  par  $(\pi - x)$ , poser  $t = \sin x$
  - si l'expression  $f(x) dx$  est invariante en remplaçant  $x$  par  $(x + \pi)$ , poser  $t = \tan x$
  - si rien ne marche, poser  $t = \tan \frac{x}{2}$
- ▶ aboutir à l'intégrale d'une fraction rationnelle.

**Exemple 10** • Calculer  $\int_0^{\pi/4} \frac{dt}{1+\cos t}$  et  $\int_0^{\pi/6} \frac{dt}{1+\sin^2 t}$ .

- Déterminer une primitive de  $\frac{1}{\sin}$  ou  $\frac{1}{\cos}$  sur un intervalle contenant  $\frac{\pi}{4}$ .
- Peut-on utiliser la règle de Bioche pour  $\int_0^{\pi} \frac{\sin(5x) \cdot \cos 6x}{1+\cos^4(2x+1)} dx$  ?
- Déterminer une primitive de la fonction  $t \mapsto \frac{t+1}{t^2+t+3}$ .

## 2.7 Formule de TAYLOR avec reste intégral

**Proposition 6** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^{n+1}$  sur le segment  $[a, b]$ . Alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} \cdot (b-t)^n dt.$$

**Exemple 11** • Montrer que la suite  $\left( S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente et de limite égale à  $e$ .

- Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de classe  $C^1$ , la méthode des rectangles qui consiste à approcher l'intégrale  $\int_a^b f$  par une somme d'aires de rectangles le long d'une subdivision équirépartie en  $n$  morceaux est en  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ . La méthode des trapèzes qui consiste à approcher le long d'une subdivision  $\sigma$  chaque intégrale  $\int_u^v f$  par l'aire du trapèze correspondant égale à  $(v-u) \cdot \frac{f(u)+f(v)}{2}$  est en  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .