Chapitre 14 :
Matrices et représentations matricielles

Table des matières

1 Premières notions sur les matrices

1.1 Définitions

Soient p et q deux entiers naturels strictement positifs et K un corps.

Définition 1 On appelle ***matrice à p lignes et q colonnes et à coefficients dans le corps K***, tout élément de l'ensemble $K^{p\times q}$. Si A est une telle matrice, on adopte les notations suivantes :

- $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant p; 1\leqslant j\leqslant q}$
- $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,q} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{p,q} \end{pmatrix}$

Le coefficient $a_{i,j}$ est un élément du corps K et il s'agit du coefficient de la matrice A placé ligne i et colonne j. On peut également le noter $A_{i,j}$

Définition 2 On note $\mathscr{M}_{p,q}(K)$ l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients dans le corps K.
Lorsque $p = q$, cela signifie que l'on s'intéresse aux matrices ayant le même nombre de lignes que de colonnes. De telles matrices sont appelées ***matrices carrées***. On note de plus $\mathscr{M}_p(K)$ l'ensemble des matrices carrées à p lignes et p colonnes (c'est-à-dire de taille $p \times p$). (En fait, $\mathscr{M}_p(K) = \mathscr{M}_{p,p}(K)$).
Lorsque $p = 1$, on dit que la matrice est une ***matrice ligne*** et si $q = 1$, on dit que la matrice est une ***matrice colonne***.

Définition 3 Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant p} \in \mathscr{M}_p(K)$ une matrice carrée d'ordre p.

- On dit que A est une ***matrice triangulaire supérieure*** si tous les coefficients situés strictement en dessous de la diagonale sont nuls : ce sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} \star & \star & \cdots & \star \\ 0 & \star & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & \star \end{pmatrix}$.
- On dit que A est une ***matrice triangulaire inférieure*** si tous les coefficients situés strictement au-dessus de la diagonale sont nuls : ce sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} \star & 0 & \cdots & 0 \\ \star & \star & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \star & \cdots & \star & \star \end{pmatrix}$.
- On dit que A est une ***matrice diagonale*** si tous les coefficients situés hors de la diagonale sont nuls : ce sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} \star & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \star & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \star \end{pmatrix}$.

Méthode : Comment montrer que des matrices sont triangulaires supérieures ou inférieures, diagonales ?

Pour montrer que $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ dans $\mathscr{M}_n(K)$ est triangulaire supérieure (resp. inférieure ; resp. diagonale) :

- prendre $i > j$ (resp. $i < j$; resp. $i \neq j$) entre 1 et n
- montrer que $a_{i,j} = 0$.

Exemple 1 Les matrices suivantes sont-elles triangulaires supérieures, inférieures, diagonales ?

• $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, • $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, • $C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

1.2 Opérations sur les matrices

Définition 4 Dans l'ensemble des matrices, on définit trois opérations :

- **addition** $+$: si $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant p;1\leqslant j\leqslant q}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant p;1\leqslant j\leqslant q}$ sont dans $\mathscr{M}_{p,q}(K)$, on pose : $A+B = (a_{i,j}+b_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant p;1\leqslant j\leqslant q}$.
- **multiplication par un scalaire** $\cdot$:
  si $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant p;1\leqslant j\leqslant q}$ est dans $\mathscr{M}_{p,q}(K)$ et $\lambda \in K$, on pose : $\lambda \cdot A = (\lambda \cdot a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant p;1\leqslant j\leqslant q}$.
- **multiplication entre matrices** $\times$: si $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant p;1\leqslant j\leqslant q} \in \mathscr{M}_{p,q}(K)$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant q;1\leqslant j\leqslant r} \in \mathscr{M}_{q,r}(K)$ (le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B), on pose : $A \times B = \left(\sum_{k=1}^{q} a_{i,k} \times b_{k,j}\right)_{1\leqslant i\leqslant p;1\leqslant j\leqslant r}$.

Méthode : Comment additionner deux matrices ?

- ▶ vérifier que les deux matrices ont même taille
- ▶ additionner coefficient par coefficient, aux places identiques dans les deux matrices.

Méthode : Comment multiplier une matrice par un scalaire λ ?

- ▶ multiplier chaque coefficient de la matrice par λ.

Méthode : Comment multiplier deux matrices entre elles ?

Soient A et B deux matrices. Pour effectuer le produit $A \times B$:

- ▶ vérifier que le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B
- ▶ placer la matrice A en bas à gauche et la matrice B en haut à droite
- ▶ pour calculer le coefficient ligne i colonne j dans la matrice $A \times B$:
  - isoler la ligne i dans A
  - isoler la colonne j dans B
  - faire les produits des termes deux à deux, l'un dans la ligne de A, l'autre dans la colonne de B
  - faire la somme des résultats obtenus
  - placer ce résultat à l'intersection de la ligne de A et de la colonne de B
- ▶ recommencer pour tous les coefficients.

Exemple 2 • Effectuer toutes les additions et les produits possibles parmi les matrices suivantes. Calculer aussi la multiplication de chaque matrice par 0, par -1 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \bullet\ B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \\ 5 & 4 & -2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

• L'ensemble des matrices diagonales ou des matrices triangulaires supérieures est stable pour les opérations d'addition et de multiplication matricielle.

1.2.1 Structure d'espace vectoriel

Proposition 1 Soient p et q dans $\mathbb{N}^*$, puis K un corps. L'ensemble $(\mathscr{M}_{p,q}(K), +, \cdot)$ forme un K-espace vectoriel de dimension $p \times q$. Le vecteur nul de cet espace vectoriel est la matrice nulle notée 0 dont tous les coefficients sont nuls.
De plus, en notant pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]$, la matrice $E_{i,j}$ ne comportant que des zéros saut un 1_K situé ligne i et colonne j, la famille $(E_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant p;1\leqslant j\leqslant q}$ forme une base de l'espace $\mathscr{M}_{p,q}(K)$ appelée ***base canonique***.
Si $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant p;1\leqslant j\leqslant q} \in \mathscr{M}_{p,q}(K)$, alors : $A = \displaystyle\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} a_{i,j} \cdot E_{i,j}$, ce qui montre que les coefficients $a_{i,j}$ sont les coordonnées de la matrice A selon la base canonique.

1.2.2 Structure d'algèbre

Proposition 2 Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et K un corps. Alors, l'ensemble $(\mathscr{M}_p(K), +, \cdot, \times)$ est une algèbre de dimension p^2, non commutative et non intègre, lorsque $p \geqslant 2$.
L'élément unité de cet anneau est la matrice identité notée I_p qui est la matrice diagonale, avec que des 1 sur la diagonale.

Exemple 3 • Dans l'anneau $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, calculer A^n, avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

• Dans l'anneau $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$, calculer $A \times B$ et $B \times A$, avec : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1.3 Liens entres applications linéaires et matrices

1.3.1 Matrice représentant une application linéaire

Méthode : Comment représenter une application linéaire par une matrice ?

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ une application linéaire entre deux espaces de dimension finie. On pose $p = \dim E$, $n = \dim F$, $\mathscr{B}$ une base de E, puis $\mathscr{B}'$ une base de F.
Pour construire la ***matrice représentant l'application linéaire*** f ***selon les bases*** $\mathscr{B}$ ***(au départ) et*** $\mathscr{B}'$ ***à l'arrivée)*** notée $A = \mathscr{M}at_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}(f) \in \mathscr{M}_{n,p}(K)$:

- prendre le premier vecteur e_1 de la base $\mathscr{B}$
- calculer l'image $f(e_1)$ de ce vecteur par f
- calculer les coordonnées de $f(e_1)$ selon la base $\mathscr{B}'$ en résolvant un système linéaire
- remplir la première colonne de la matrice A avec ces n coordonnées
- refaire la même chose avec e_2, puis $f(e_2)$, puis ses coordonnées selon $\mathscr{B}'$ pour remplir la deuxième colonne, jusqu'à la $p^{ème}$ colonne de A.

Méthode : Comment représenter un endomorphisme par une matrice ?

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ avec E un K-espace vectoriel de dimension finie. On pose $p = \dim E$, puis $\mathscr{B}$ une base de E.
Pour construire la ***matrice représentant l'endomorphisme f selon la base $\mathscr{B}$*** notée $A = \mathscr{M}at_{\mathscr{B}}(f) \in \mathscr{M}_p(K)$:

- prendre le premier vecteur e_1 de la base $\mathscr{B}$
- calculer l'image $f(e_1)$ de ce vecteur par f
- calculer les coordonnées de $f(e_1)$ selon la base $\mathscr{B}$ en résolvant un système linéaire
- remplir la première colonne de la matrice A avec ces p coordonnées
- refaire la même chose avec e_2, puis $f(e_2)$, puis ses coordonnées selon $\mathscr{B}$ pour remplir la deuxième colonne, jusqu'à la $p^{ème}$ colonne de A.

Exemple 4 Donner les matrices représentant f selon les bases indiquées :

- $f(x,y,z) = (2x+2y-z, 5y-x)$ avec $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$
- $f(x,y,z) = (x-y+z, y-2z, 3x+z)$ avec $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$
- $f(P) = XP'(X) - P(2) \cdot X$ dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}_3[X])$ selon la base canonique
- la dérivation sur $F = \text{Vect}(\mathbf{1}, f, g)$, selon la base $\Big(\mathbf{1} : x \longmapsto 1, f : x \longmapsto e^{2x}\cos(3x), g : x \longmapsto e^{2x}\sin(3x)\Big)$.
- $f : M \longmapsto AM$ et $g : M \longmapsto MA$, avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ selon la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$
- le décalage $f : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sur l'espace des suites réelles vérifiant la relation de récurrence linéaire : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+3} = v_{n+1} + v_n$.

1.3.2 Application linéaire canoniquement associée à une matrice

Méthode : Comment associer à une matrice une application linéaire ?

Soit A une matrice dans $\mathscr{M}_{p,q}(K)$.
L'***application linéaire canoniquement associée à cette matrice*** est définie par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{q,1}(K) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{p,1}(K) \\ X & \longmapsto & A \times X \end{array} \right. .$$

Exemple 5 Indiquer les applications linéaires canoniquement associées aux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \end{pmatrix} \text{ et } E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

toutes les matrices étant à coefficients réels par exemple.

Exemple 6 Pour chaque application linéaire précédente, calculer la matrice représentant cette application linéaire selon les bases canoniques du départ et de l'arrivée. Faire alors l'application numérique dans le théorème du rang pour chaque application linéaire trouvée.

Définition 5 Si A est une matrice dans $\mathscr{M}_{p,q}(K)$, on note u_A, ou f_A ou encore A l'application linéaire canoniquement associée à cette matrice. Il s'agit au choix d'un élément dans $\mathscr{L}(\mathscr{M}_{q,1}(K), \mathscr{M}_{p,1}(K))$ ou dans $\mathscr{L}(K^q, K^p)$, en identifiant les matrices-colonnes avec les uplets.

Proposition 3 Soit A une matrice dans $\mathscr{M}_{p,q}(K)$. En notant $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ les bases canoniques respectives de K^q et K^p, alors :

$$\boxed{\mathscr{M}at_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}(u_A) = A.}$$

Définition 6 Soit $A \in \mathscr{M}_{p,q}(K)$ une matrice. On appelle ***rang*** de la matrice A le rang de l'application linéaire associée $A \in \mathscr{L}(K^q, K^p)$. Ce rang est encore noté $\mathrm{Rg}(A)$.

Méthode : Comment calculer le rang d'une matrice et trouver une base de l'image ?

Si A est dans $\mathscr{M}_{p,q}[K]$, pour calculer $\mathrm{Rg}(A)$, on peut :
- trouver une base de $\mathrm{Ker}A$ en résolvant $AX = 0$
- appliquer le théorème du rang.

Pour trouver une base de $\mathrm{Im}A$, on utilise le fait que le rang d'une matrice est exactement le rang de la famille constituée des colonnes de la matrice :
- considérer la première colonne et la garder si elle est non nulle
- considérer la deuxième colonne et la garder si elle n'est pas colinéaire à la première
- recommencer avec les autres colonnes en gardant la colonne si elle n'est pas dans l'espace vectoriel engendré par les précédentes
- les colonnes qui ont été gardées forment une base de $\mathrm{Im}A$.

Exemple 7 Déterminer une base de $\mathrm{Ker}A$ et $\mathrm{Im}A$ dans les cas suivants : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$,$A = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$.

1.4 Formules de composition

Proposition 4 Soient E, F et G trois K-espaces vectoriels de dimensions finies. Soient $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$. On pose :
- $r = \mathrm{dim}E$ et $\mathscr{B}$ une base de E
- $q = \mathrm{dim}F$ et $\mathscr{C}$ une base de F
- $p = \mathrm{dim}G$ et $\mathscr{D}$ une base de G.

Alors, on dispose de la formule suivante :

$$\boxed{\mathscr{M}at_{\mathscr{B}}^{\mathscr{D}}(g \circ f) = \mathscr{M}at_{\mathscr{C}}^{\mathscr{D}}(g) \times \mathscr{M}at_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}(f).}$$

2 Algèbres $\mathscr{M}_p(K)$ et $\mathscr{L}(E)$

Dans ce paragraphe, on fixe un K-espace vectoriel E de dimension finie égale à p. Soit $\mathscr{B}$ une base de l'espace vectoriel E.

2.1 Algèbres monogènes et polynômes

Proposition 5 Soit $(\mathscr{A}, +, \times, \cdot)$ une algèbre sur le corps K.

• Pour tout polynôme $P(X) = \sum_{i=0}^{d} a_i \ X^i \in K[X]$ et pour tout élément u de l'algèbre $\mathscr{A}$, on note $P(u)$ l'élément $\sum_{i=0}^{d} a_i \ u^i$ de l'algèbre $\mathscr{A}$. Ainsi,

$$P(u) = a_0 \cdot 1_{\mathscr{A}} + a_1 \cdot u + a_2 \cdot u^2 + \cdots + a_d \cdot u^d,$$

où u^i est le produit de l'élément u, i fois par lui-même.
• Soit u un élément de l'algèbre $\mathscr{A}$.
L'application $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} K[X] & \longrightarrow & \mathscr{A} \\ P(X) & \longmapsto & P(u) \end{array} \right.$ est un morphisme d'algèbres.
De plus, l'image $\mathrm{Im}(\varphi)$ est notée $K[u] = \Big\{P(u) \in \mathscr{A} \ ; \ P(X) \in K[X]\Big\}$. C'est une sous-algèbre commutative de $\mathscr{A}$. C'est la plus petite sous-algèbre de $\mathscr{A}$ contenant u.
Pour tous polynômes $P(X)$ et $Q(X)$ dans $K[X]$,

$$\Big(P \times Q\Big)(u) = P(u) \times Q(u).$$

En outre, le noyau $\mathrm{Ker}(\varphi) = \Big\{P(X) \in K[X] \mid P(u) = 0_{\mathscr{A}}\Big\}$ est un idéal de l'anneau principal $K[X]$. Les éléments $P(X)$ de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ sont appelés ***polynômes annulateurs de l'élément*** u. Lorsque l'algèbre $\mathscr{A}$ est de dimension finie, cet idéal $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est généré par un polynôme unitaire $\mu_u(X)$ appelé ***polynôme minimal de l'élément*** u. Lorsque l'algèbre $\mathscr{A}$ est de plus intègre, ce polynôme minimal $\mu_u(X)$ est irréductible dans l'anneau $K[X]$.

2.2 Polynômes d'endomorphismes ou de matrices

Proposition 6 • Si E et F sont deux K-espaces vectoriels de dimension finie, si $\mathscr{B}$ est une base de E et $\mathscr{C}$ est une base de F, en posant $p = \dim(E)$ et $q = \dim(F)$, alors l'application $\Psi : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E, F) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{q,p}(K) \\ f & \longmapsto & \mathscr{M}at_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}(f) \end{array} \right.$ est un isomorphisme linéaire.

• L'application $\Phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E) & \longrightarrow & \mathscr{M}_p(K) \\ f & \longmapsto & \mathscr{M}at_{\mathscr{B}}(f) \end{array} \right.$ est un isomorphisme d'algèbres.

• Pour tout polynôme $P(X) \in K[X]$ et pour tout endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$, on a :

$$P\Big(\mathscr{M}at_{\mathscr{B}}(f)\Big) = \mathscr{M}at_{\mathscr{B}}\Big(P(f)\Big).$$

Définition 7 Soient f un endomorphisme dans $\mathscr{L}(E)$ et $P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k \cdot X^k$ un polynôme dans $K[X]$. On appelle ***polynôme d'endomorphisme*** et on note $P(f)$ l'endomorphisme suivant :

$$P(f) = \sum_{k=0}^{d} a_k \cdot f^k = a_0 \cdot \mathrm{id}_E + a_1 \cdot f + a_2 \cdot f \circ f + \cdots + a_d \cdot f^d,$$

avec $f^k = f \circ f \cdots \cdots \circ f$ où le symbole f apparaît k fois.
On a des notations identiques avec les matrices carrées.

Exemple 8 • Un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ est un projecteur si et seulement si $f^2 - f = 0$ (le polynôme $P(X) = X^2 - X$ est un ***polynôme annulateur*** de f).

• Un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ est une symétrie si et seulement si $f^2 - \mathrm{id}_E = 0$ (le polynôme $P(X) = X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de f).

Exemple 9 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et K un corps.
Montrer que les seules matrices $A \in \mathscr{M}_n(K)$ telles que :

$$\forall B \in \mathscr{M}_n(K),\ AB = BA$$

sont les matrices d'homothéties.

2.3 Groupe des inversibles

On rappelle que si $(A, +, \times)$ est un anneau et $a \in A$, l'élément a est dit inversible si il existe $b \in A$ tel que :

$$a \times b = b \times a = 1_A \quad : \text{l'élément } b \text{ est unique et est noté } b = a^{-1}.$$

On rappelle également que l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau A est noté A^* et qu'il forme un groupe pour la LCI $\times$. De plus, comme dans tout groupe, si $a_1, \cdots, a_r$ sont r éléments inversibles de l'anneau A, le produit $a_1 \times \cdots \times a_r$ est encore inversible, d'inverse :

$$(a_1 \times \cdots \times a_r)^{-1} = a_r^{-1} \times \cdots \times a_1^{-1}.$$

Définition 8 On note $GL(E)$ l'ensemble des inversibles de l'anneau $(\mathscr{L}(E), +, \circ)$. Cet ensemble est appelé le ***groupe linéaire*** sur E. Un élément f est inversible si il existe $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que : $g \circ f = f \circ g = \mathrm{id}_E$.

Définition 9 On note $GL_p(K)$ l'ensemble des matrices inversibles de l'anneau $(\mathscr{M}_p(K), +, \times)$. Cet ensemble est appelé le ***groupe linéaire d'ordre*** p des matrices carrées inversibles de taille $p \times p$. Une matrice $A \in \mathscr{M}_p(K)$ est inversible si il existe $B \in \mathscr{M}_p(K)$ telle que $A \times B = B \times A = I_p$.

Méthode : Comment montrer qu'une matrice est inversible ?

Soit A dans $\mathscr{M}_p(K)$.

- S'il existe $B \in \mathscr{M}_p(K)$ tel que $AB = I_p$, alors A est inversible et $A^{-1} = B$.
- S'il existe $C \in \mathscr{M}_p(K)$ tel que $CA = I_p$, alors A est inversible et $A^{-1} = C$.
- L'application $A \in \mathscr{L}(K^p)$ est une bijection si et seulement si A est inversible et l'inverse A^{-1} est la bijection réciproque de A.

Exemple 10 • Si $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $A^3 + 3A^2 - A + 5I_3 = 0$, montrer que A est inversible.

• Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible.

3 Systèmes linéaires

3.1 Premières notions

Définition 10 On appelle ***système linéaire*** de n ***équations*** à p ***inconnues*** $x_1, \cdots, x_p$, la donnée d'un système de la forme :

$$\mathscr{S} \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{1,1} \cdot x_1 & + & a_{1,2} \cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p} \cdot x_p & = & y_1 \\ a_{2,1} \cdot x_1 & + & a_{2,2} \cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p} \cdot x_p & = & y_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} \cdot x_1 & + & a_{n,2} \cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p} \cdot x_p & = & y_n \end{array} \right. ,$$

où les nombres $a_{i,j}$ sont connus et les paramètres $y_1, \cdots, y_n$ également.
On dit que deux systèmes linéaires sont ***équivalents*** s'ils ont exactement les mêmes solutions.
Lorsque $n \leqslant p$, on dit que le système est ***trapézoïdal*** si le système est de la forme :

$$\mathscr{T} \left\{ \begin{array}{ccccccccc} \alpha_1 \cdot x_1 & + & \star & + & \cdots & + & \star & = & y_1 \\ & & \alpha_2 \cdot x_2 & + & \cdots & + & \star & = & y_2 \\ & & & \ddots & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & \alpha_n \cdot x_n & + & \cdots & = & y_n \end{array} \right. .$$

Les nombres $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ sont alors appelés ***coefficients diagonaux dans le système trapézoïdal***.

3.2 Méthode du pivot de Gauss

3.2.1 Opérations élémentaires

On se donne un système linéaire $\mathscr{S}$ de n équations à p inconnues :

$$\mathscr{S} \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{1,1} \cdot x_1 & + & a_{1,2} \cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p} \cdot x_p & = & y_1 \\ a_{2,1} \cdot x_1 & + & a_{2,2} \cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p} \cdot x_p & = & y_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} \cdot x_1 & + & a_{n,2} \cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p} \cdot x_p & = & y_n \end{array} \right. ,$$

où les nombres $a_{i,j}$ sont connus et les paramètres $y_1, \cdots, y_n$ également. On note également pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, L_i la $i^{ème}$ équation du système

Définition 11 Soient $i \neq j$ dans $[\![1, n]\!]$, a dans K^*. On note :

- $L_i \longleftrightarrow L_j$, l'opération qui consiste à échanger les lignes L_i et L_j : c'est une ***transposition***
- $L_i \longleftarrow L_i + a \cdot L_j$, l'opération qui consiste à multiplier la $j^{ème}$ équation par a puis à ajouter cette nouvelle équation à L_i : : c'est une ***transvection***
- $L_i \longleftarrow a \cdot L_i$ l'opération qui consiste à multiplier la $i^{ème}$ équation par le nombre non nul a : : c'est une ***dilatation***.

Proposition 7 Soit $A \in \mathscr{M}_{p,q}(K)$ une matrice.

• Si $i \neq j$ sont deux indices entre 1 et p, en posant $M_1 = I_p - (E_{i,i} + E_{j,j}) + E_{i,j} + E_{j,i}$ [matrice de transposition], alors la matrice $M_1 A$ revient à échanger dans A les deux lignes L_i et L_j. La matrice AM_1 revient à échanger dans A les deux colonnes C_i et C_j.

• Si $i \neq j$ sont deux indices entre 1 et p, si $a \in K$, en posant $M_2 = I_p + a \cdot E_{i,j}$ [matrice de transvection], alors la matrice $M_2 A$ revient à modifier dans A la ligne L_i par la ligne $L_i + a \cdot L_j$. La matrice AM_2 revient à remplacer dans A la colonne C_j par la colonne $C_j + a \cdot C_i$.

• Si i est un indice entre 1 et p et si $a \in K^*$, en posant $M_3 = I_p + (a-1) \cdot E_{i,i}$ [matrice de dilatation], alors la matrice $M_3 A$ revient à modifier dans A la ligne L_i par la ligne $a \cdot L_i$. La matrice AM_3 revient à remplacer dans A la colonne C_i par la ligne $a \cdot C_i$.

3.2.2 Résolution des systèmes (rappels)

Méthode : Comment résoudre un système linéaire ?

On applique la méthode du ***pivot de Gauss*** en utilisant les notations précédentes :

- si $a_{1,1} \neq 0$ garder la ligne L_1, sinon, l'échanger avec une ligne où figure l'inconnue x_1
- combiner les lignes suivantes avec L_1 pour éliminer l'inconnue x_1 à partir de la deuxième équation
- refaire la même chose avec le sous-système sans la ligne L_1 et sans l'inconnue x_1
- aboutir à un système triangulaire (ou trapézoïdal)
- exprimer la première inconnue de la dernière ligne en fonction des autres inconnues (qui deviennent des paramètres) s'il y en a ou bien calculer directement cette inconnue
- remonter dans les lignes pour obtenir les autres inconnues en fonction des paramètres ou directement leur valeur.

Méthode : Comment savoir si un système est de Cramer ou non ?

On considère un système avec autant d'équations que d'inconnues.

- appliquer la méthode du pivot de Gauss
- aboutir à un système triangulaire
- le système initial est de Cramer si et seulement si dans ce système triangulaire, tous les coefficients diagonaux sont non nuls
- si le système est de Cramer, calculer la dernière inconnue, puis remonter dans les équations.

Exemple 11 Si $A \in GL_n(K)$, alors A est un produit de matrices de type M_1, M_2 ou M_3 présentes dans la proposition 7.

Exemple 12 Résoudre les systèmes suivants : $\left\{ \begin{array}{r} x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_4 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{array} \right.$, $\left\{ \begin{array}{r} \alpha \cdot x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_3 = -1 \\ x_2 + 3x_3 - x_1 = 3 \end{array} \right.$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

3.3 Application aux matrices

Méthode : Comment savoir si une matrice est inversible et calculer son inverse ?

Soit A une matrice carrée dans $\mathscr{M}_p(K)$. Pour savoir si elle est inversible ou non :

- fixer Y une matrice colonne dans $\mathscr{M}_{p,1}(K)$
- retranscrire l'équation matricielle $A \times X = Y$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{p,1}(K)$ sous forme d'un système linéaire de p équations à p inconnues
- appliquer la méthode précédente pour savoir si ce système est de Cramer ou non :
  - si le système n'est pas de Cramer, la matrice A n'est pas inversible
  - si le système est de Cramer, la matrice A est inversible.

  Dans le cas d'un système de Cramer, pour calculer A^{-1} :
  - résoudre complètement le système
  - exprimer les inconnues $x_1, \cdots, x_p$ en fonction des paramètres $y_1, \cdots, y_p$ de façon bien ordonnée
  - former la matrice B des coefficients apparaissant dans cette résolution
  - donner l'inverse de A : $A^{-1} = B$.

Exemple 13 Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, calculer l'inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ -5 & -2 & -7 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix};\ D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4 Autres opérations sur les matrices

On considère deux entiers p et q dans $\mathbb{N}^*$ puis un corps K.

4.1 Transposée

Définition 12 Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant p; 1\leqslant j\leqslant q} \in \mathscr{M}_{p,q}(K)$. On appelle ***transposée*** de la matrice A et on note A^T la matrice $(b_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant q; 1\leqslant j\leqslant p}$ dans $\mathscr{M}_{q,p}(K)$ avec : $\forall (i,j) \in [\![1,q]\!] \times [\![1,p]\!],\ b_{i,j} = a_{j,i}$.

Exemple 14 Déterminer la transposée des matrices suivantes : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 8 & -7 & 4 \end{pmatrix}$.

Proposition 8 On a les propriétés suivantes :
- $(A^T)^T = A$
- $(A \times B)^T = B^T \times A^T$ lorsque les opérations sont possibles
- si A est inversible, A^T aussi et $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Définition 13 Soit $A \in \mathscr{M}_p(K)$.
On dit que la matrice A est ***symétrique*** si $A^T = A$. On dit que la matrice A est ***antisymétrique*** si $A^T = -A$.

Exemple 15 • Les espaces $S_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques et $A_n(\mathbb{R})$ des matrices anti-symétriques forment deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
• Si $A \in \mathscr{M}_{p,q}(K)$ est une matrice rectangulaire, alors les matrices A et A^T ont toujours le même rang.

4.2 Trace

Définition 14 Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant p}$ une matrice carrée dans $\mathscr{M}_p(K)$. On appelle ***trace*** de la matrice A et on note $\mathrm{Tr}(A)$ le nombre : $\mathrm{Tr}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} a_{i,i}$: c'est la somme des coefficients diagonaux.

Exemple 16 On a $\mathrm{Tr}(I_p) = p$.

Proposition 9 On a les propriétés suivantes :

- la trace $\mathrm{Tr} : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_p(K) & \longrightarrow & K \\ A & \longmapsto & \mathrm{Tr}(A) \end{array} \right.$ est une forme linéaire non nulle
- pour toutes matrices rectangulaires $A \in \mathscr{M}_{p,q}(K)$ et $B \in \mathscr{M}_{q,p}(K)$, on a : $\mathrm{Tr}(A \cdot B) = \mathrm{Tr}(B \cdot A)$.

5 Réduction des endomorphismes ou des matrices

Étant donnée une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$ le but est de représenter f par une matrice la plus simple possible...

5.1 Matrices de passage

Méthode : Comment construire la matrice de passage de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{B}'$?

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E.

Pour constuire la ***matrice de passage*** de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ notée P :

- ▶ calculer les coordonnées du premier vecteur de $\mathscr{B}'$ selon la base $\mathscr{B}$
- ▶ remplir la première colonne de P avec ces p coordonnées
- ▶ recommencer avec les autres vecteurs.
- ▶ en fait : $P = \mathscr{M}at^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}'}(\mathrm{id}_E)$.

Exemple 17 • Calculer les matrices de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ avec :

$\longrightarrow$ $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B}' = \Big((1, 1, 1), (1, -1, 1), (-2, 1 - 3)\Big)$

$\longrightarrow$ $\mathscr{B}'$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B} = \Big((1, 1, 1), (1, -1, 1), (-2, 1 - 3)\Big)$.

• Si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases d'un espace vectoriel E, en notant P la matrice de passage de la $\mathscr{B}$ vers la base $\mathscr{B}'$, quelle est la matrice de passage de la base $\mathscr{B}^*$ vers la base $\mathscr{B}'^*$?

• Si $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ sont trois bases d'un espace E, si P est la matrice de passage de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{C}$ et si Q est la matrice de passage de $\mathscr{C}$ vers $\mathscr{D}$, quelle est la matrice de passage de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{D}$? Quelle est la matrice de passage de $\mathscr{C}$ vers $\mathscr{B}$?

5.2 Changement de base pour les vecteurs

Proposition 10 Soit $x \in E$ puis $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. On pose : X (resp. X') la matrice colonne des coordonnées de x selon $\mathscr{B}$ (resp. selon $\mathscr{B}'$). Si P est la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, alors $X = P \times X'$.

5.3 Changement de base pour les applications linéaires

Proposition 11 Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ une application linéaire. On pose :

- $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ deux bases de E
- $\mathscr{B}'_1$ et $\mathscr{B}'_2$ deux bases de F
- $A = \mathscr{M}at^{\mathscr{B}'_1}_{\mathscr{B}_1}(f)$ et $B = \mathscr{M}at^{\mathscr{B}'_2}_{\mathscr{B}_2}(f)$ dans $\mathscr{M}_{p,q}(K)$
- P la matrice de passage de $\mathscr{B}_1$ à $\mathscr{B}_2$ et Q la matrice de passage de $\mathscr{B}'_1$ à $\mathscr{B}'_2$ dans $GL_p(K)$.

Alors, :

$$\boxed{B = Q^{-1} \cdot A \cdot P.}$$

De plus, lorsque f est un endomorphisme de E de dimension p, en choisissant deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ de E, en posant P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, puis $A = \mathscr{M}at_{\mathscr{B}}(f)$ et $B = \mathscr{M}at_{\mathscr{B}'}(f)$, alors :

$$\boxed{B = P^{-1} \cdot A \cdot P.}$$

5.4 Équivalence et similitude

5.4.1 Matrices équivalentes

Soient p et q dans $\mathbb{N}^*$ puis K un corps.

Définition 15 Soient A et B deux matrices dans $\mathscr{M}_{p,q}(K)$.
On dit que les deux matrices sont ***équivalentes*** s'il existe deux matrices inversibles $P \in GL_q(K)$ et $Q \in GL_p(K)$ telles que : $B = Q^{-1} \cdot A \cdot P$.

Proposition 12 On dispose des propriétés suivantes :

- la relation $\mathscr{R}$ définie par : « $A \mathscr{R} B \iff$ les matrices A et B sont équivalentes » est une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathscr{M}_{p,q}(K)$
- deux matrices A et B sont équivalentes si et seulement si elles représentent une même application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$ – avec $\dim(E) = q$ et $\dim(F) = p$ – dans des bases différentes au départ et à l'arrivée
- deux matrices A et B dans $\mathscr{M}_{p,q}(K)$ sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang ; plus précisément, en posant la matrice $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ en quatre blocs de matrices, alors la matrice est de rang r et il existe exactement $1 + \min(p, q)$ classes d'équivalence. Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_{p,q}(K)$, la matrice A est équivalente à la matrice $J_{\mathrm{Rg}(A)}$.

Méthode : Comment savoir si deux matrices sont équivalentes ?

Soient A et B deux matrices de même taille. Pour savoir si elles sont équivalentes :

- ▶ calculer $\mathrm{Rg}(A)$ et $\mathrm{Rg}(B)$
- ▶ si $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(B)$, elles sont équivalentes et même équivalentes à la matrice $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exemple 18 • Pour les matrices suivantes, déterminer un entier r et deux matrices inversibles P et Q tels que $Q^{-1}AP = J_r$.

$\longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$; $\longrightarrow A = E_{i,j} \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{C})$

$\longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; $\longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -6 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

• Déterminer deux matrices inversibles P et Q telles que la matrice QAP soit de type J_r, avec les matrices suivantes, en utilisant les opérations élémentaires :

$\longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$, $\longrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5.4.2 Matrices semblables

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et K un corps.

Définition 16 Soient A et B deux matrices carrées dans $\mathscr{M}_p(K)$.
On dit que les matrices A et B sont ***semblables*** si il existe une matrice inversible $P \in GL_p(K)$ telle que : $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

Proposition 13 On dispose des propriétés générales suivantes :

- la relation de similitude définie par : « $A \mathscr{R} B \iff$ les matrices A et B sont semblables » est une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathscr{M}_p(K)$ des matrices carrées
- deux matrices carrées A et B sont semblables si et seulement si elles représentent un même endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ – avec $\dim(E) = p$ – dans des bases différentes

Proposition 14 Soient A et B dans $\mathscr{M}_p(K)$.

• Si A et B sont semblables, elles sont équivalentes. Elles ont donc même rang.
• Si A et B sont semblables, elles ont même trace.
• Les matrices d'homothéties sont exactement les matrices dont la classe d'équivalence pour la similitude est un singleton.
• Si A et B ont même trace et même rang, elles ne sont pas forcément semblables.

Exemple 19 • Montrer que les matrices $\begin{pmatrix} 1 & \star \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ sont semblables.

• Montrer que si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice telle que $A^{n-1} \neq 0$ et $A^n = 0$, alors la matrice A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

• Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et A^T sont semblables.

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que la matrice A est une matrice de projection si et seulement si la matrice A est semblable à une matrice de type J_r.

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que la matrice A est une matrice de symétrie si et seulement si la matrice A est semblable à une matrice de type $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$, pour un certain entier $r \in [\![0, n]\!]$.