

# Chapitre 12 :

## Fractions rationnelles à une indéterminée, le corps $K(X)$

### Table des matières

|          |                                                                  |          |
|----------|------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>1</b> | <b>Construction du corps <math>K(X)</math>, opérations</b>       | <b>2</b> |
| 1.1      | Définitions . . . . .                                            | 2        |
| 1.2      | Degré d'une fraction rationnelle . . . . .                       | 2        |
| 1.3      | Dérivée d'une fraction rationnelle . . . . .                     | 2        |
| <b>2</b> | <b>Décomposition en éléments simples</b>                         | <b>3</b> |
| 2.1      | Décomposition en éléments simples générale dans $K(X)$ . . . . . | 3        |
| 2.2      | Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ . . . . . | 3        |
| 2.3      | Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ . . . . . | 4        |

# 1 Construction du corps $K(X)$ , opérations

## 1.1 Définitions

**Définition 1** Soit  $K$  un corps commutatif. On rappelle que  $K[X]$  désigne l'anneau intègre des polynômes à une indéterminée et à coefficients dans le corps  $K$ .

On définit sur  $E = K[X] \times (K[X] \setminus \{0\})$  la relation  $\mathcal{R}$  par :

$$\forall ((P_1, Q_1), (P_2, Q_2)) \in E^2, \quad (P_1, Q_1) \mathcal{R} (P_2, Q_2) \iff P_1 \cdot Q_2 = P_2 \cdot Q_1.$$

On vérifie que la relation  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence sur  $E$ . Pour tout élément  $(P, Q) \in K[X] \times (K[X] \setminus \{0\})$ , on note  $\frac{P}{Q}$  ou  $\frac{P(X)}{Q(X)}$ , sa classe d'équivalence modulo  $\mathcal{R}$ . La classe  $\frac{P(X)}{Q(X)}$  s'appelle **fraction rationnelle** à coefficients dans le corps  $K$ .

On note  $K(X)$  l'ensemble quotient  $E/\mathcal{R}$ , c'est-à-dire l'ensemble des fractions rationnelles. On vérifie facilement que si  $\frac{P(X)}{Q(X)}$  est une fraction rationnelle, il existe une seule représentation de cette fraction en  $\frac{P_1(X)}{Q_1(X)}$  avec  $P_1 \wedge Q_1 = 1$  et  $Q_1$  unitaire. Cette représentation est appelée **fraction irréductible**. Les racines de  $P(X)$  sont appelés les **zéros** et les racines de  $Q(X)$  sont appelés les **pôles** de la fraction rationnelle.

On définit sur  $K(X)$  les trois opérations suivantes :

- une addition notée  $+$  :  $\frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1 \cdot Q_2 + P_2 \cdot Q_1}{Q_1 \cdot Q_2}$ .
- une multiplication notée  $\times$  :  $\frac{P_1}{Q_1} \times \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1 \cdot P_2}{Q_1 \cdot Q_2}$ .
- une multiplication par les scalaires notée  $\cdot$  :  $\lambda \cdot \frac{P}{Q} = \frac{\lambda \cdot P}{Q}$ .

**Proposition 1** L'ensemble  $(K(X), +, \times)$  est un corps commutatif d'élément nul  $0 = \frac{0}{1}$ , d'élément unité  $1 = \frac{1}{1}$ .

## 1.2 Degré d'une fraction rationnelle

**Définition 2** Soit  $F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$  une fraction rationnelle. On appelle **degré** de cette fraction rationnelle et on note  $\deg(F)$  le nombre :  $\deg(F) = \deg\left(\frac{P}{Q}\right) = \deg(P) - \deg(Q)$  appartenant à  $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ .

**Proposition 2** Soient  $F_1$  et  $F_2$  deux fractions rationnelles dans  $K(X)$ . Alors :

- $\deg(F_1 + F_2) \leq \max\{\deg(F_1), \deg(F_2)\}$ , avec égalité lorsque  $\deg(F_1) \neq \deg(F_2)$
- $\deg(F_1 \times F_2) = \deg(F_1) + \deg(F_2)$ .

## 1.3 Dérivée d'une fraction rationnelle

**Définition 3** Soit  $F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$  une fraction rationnelle. On appelle **dérivée** de cette fraction rationnelle et on note  $F'(X)$  la fraction rationnelle :

$$F'(X) = \frac{P'(X) \cdot Q(X) - P(X) \cdot Q'(X)}{Q(X)^2}.$$

**Proposition 3** Soient  $F_1$  et  $F_2$  deux fractions rationnelles. Alors :

$$(F_1 + F_2)' = F_1' + F_2' \text{ et } (F_1 \times F_2)' = F_1' \times F_2 + F_1 \times F_2'.$$

## 2 Décomposition en éléments simples

### 2.1 Décomposition en éléments simples générale dans $K(X)$

**Théorème 1** Soit  $F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$  une fraction rationnelle irréductible. On pose :  $Q(X) = \xi \cdot \prod_{k=1}^r \pi_k(X)^{\alpha_k}$ , sa factorisation. Alors, on peut écrire la fraction rationnelle  $F(X)$  d'une unique manière sous la forme :

$$F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)} = E(X) + \sum_{k=1}^r \left( \frac{R_{1,k}(X)}{\pi_k(X)} + \frac{R_{2,k}(X)}{\pi_k(X)^2} + \dots + \frac{R_{\alpha_k,k}(X)}{\pi_k(X)^{\alpha_k}} \right),$$

avec :  $E(X)$  un polynôme appelé *partie entière ou polynomiale* et  $\deg(R_k) < \deg(\pi_k(X))$ . Une telle écriture s'appelle *décomposition en éléments simples sur  $K$*  de la fraction rationnelle  $F(X)$ .

### 2.2 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$

**Méthode :** Comment déterminer la D.E.S. d'une fraction rationnelle dans  $\mathbb{C}(X)$  ?

Soit  $F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$  une fraction rationnelle dans  $\mathbb{C}(X)$ . Pour effectuer sa D.E.S. :

- ▶ vérifier que  $F(X)$  est irréductible, sinon la simplifier
- ▶ effectuer la division euclidienne de  $P(X)$  par  $Q(X)$  : le quotient  $E(X)$  est la partie polynomiale et  $R(X)$  est le reste ; si  $\deg(P) < \deg(Q)$ , cette étape est inutile
- ▶ factoriser au maximum le dénominateur  $Q(X)$  dans  $\mathbb{C}[X]$  :  $Q(X) = \xi \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$
- ▶ écrire la forme générale de la D.E.S. :  $\frac{R(X)}{Q(X)} = \sum_{k=1}^r \left( \frac{c_{1,k}}{X - \lambda_k} + \frac{c_{2,k}}{(X - \lambda_k)^2} + \dots + \frac{c_{\alpha_k,k}}{(X - \lambda_k)^{\alpha_k}} \right)$
- ▶ commencer par calculer chaque constante  $c_{\alpha_k,k}$  à droite dans chaque parenthèse :
  - utiliser la formule :  $c_{\alpha_k,k} = \left( \frac{(X - \lambda_k)^{\alpha_k} \cdot P(X)}{Q(X)} \right)$  évalué en  $\lambda_k$
- ▶ lorsque le pôle  $\lambda_k$  est simple ( $\alpha_k = 1$ ), utiliser éventuellement la formule :  $c_{\alpha_k,k} = \frac{P(\lambda_k)}{Q'(\lambda_k)}$
- ▶ pour calculer les autres constantes à gauche dans chaque parenthèse :
  - utiliser la formule :  $c_{1,1} + c_{1,2} + \dots + c_{1,r} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot R(x)}{Q(x)}$
  - calculer la limite en prenant les termes de plus haut degré
- ▶ pour calculer encore d'autres constantes :
  - effectuer des évaluations pour obtenir d'autres équations
  - utiliser d'éventuelles symétries de  $F(X)$  ; par exemple  $F(-X)$  : identifier les deux D.E.S. obtenues.

**Exemple 1** • Soit  $P(X)$  un polynôme non nul à coefficients complexes. On note  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  les racines complexes différentes du polynôme  $P(X)$ , de multiplicités respectives  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ . Montrer que la décomposition

en éléments simples de la fraction rationnelle  $\frac{P'(X)}{P(X)}$  est :

$$\frac{P'(X)}{P(X)} = \sum_{k=1}^r \frac{\alpha_k}{X - \lambda_k}.$$

- En déduire tous les polynômes  $P(X) \in \mathbb{C}[X]$  tels que le polynôme  $P'(X)$  divise le polynôme  $P(X)$ .

## 2.3 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

Méthode : Comment calculer la D.E.S. dans  $\mathbb{R}(X)$  ?

Soit  $F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$  dans  $\mathbb{R}(X)$ . Pour effectuer sa décomposition dans  $\mathbb{R}(X)$  :

- ▶ vérifier si la fraction est bien irréductible
- ▶ effectuer le cas échéant la division euclidienne :  $P(X) = E(X) \cdot Q(X) + R(X)$
- ▶ factoriser  $Q(X)$  dans  $\mathbb{R}(X)$
- ▶ écrire la forme générale de la D.E.S. de  $\frac{R(X)}{Q(X)}$  avec des termes en  $\frac{c}{(X - \lambda)^\alpha}$  et  $\frac{dX + e}{(X^2 + aX + b)^\beta}$
- ▶ pour le calcul des constantes  $\frac{c}{(X - \lambda_k)^{\alpha_k}}$ , utiliser  $c = \left( \frac{(X - \lambda_k)^{\alpha_k} \cdot P(X)}{Q(X)} \right)$  évalué en  $\lambda_k$  ou  $c = \frac{P(\lambda_k)}{Q'(\lambda_k)}$  si  $\lambda_k$  est un pôle simple
- ▶ pour le calcul des constantes sur des irréductibles de degré 2 d'exposant maximal :  $\frac{cX + d}{\pi(X)^{\beta_k}}$  :
  - calculer une racine complexe  $z_0$  de  $\pi(X)$
  - utiliser la formule :  $cz_0 + d = \left( \frac{\pi(X)^{\beta_k} \cdot P(X)}{Q(X)} \right)$  évalué en  $z_0$
  - identifier parties réelle et imaginaire
- ▶ pour les autres constantes :
  - calculer de deux manières différentes :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xR(x)}{Q(x)}$
  - effectuer des évaluations
  - utiliser des symétries éventuelles de  $F(X)$ .

**Exemple 2** Effectuer les D.E.S des fractions rationnelles suivantes :  $\frac{1}{X^n - 1}$  et  $\frac{X + 2X^3 + 4X^4}{(X^2 + 2X - 3)^2}$ .

**Exemple 3** Déterminer la décomposition en éléments simples dans  $\mathbb{R}(X)$  et  $\mathbb{C}(X)$  des fractions rationnelles :

- $\frac{X^7 - 6X^4 + 2X^2 + 1}{(X^2 + 4) \cdot (X + 1)}$
- $\frac{X^5 + X^4 - X^2 + X}{(X^2 + 4) \cdot (X + 1)^2}$
- $\frac{X^5 + X^4 - X^2 + X}{(X^2 + 4)^2 \cdot (X + 1)^2}$
- $\frac{X^3 + 2}{(X^2 + 4) \cdot (X^2 + 1)}$

**Exemple 4** Effectuer les décompositions en éléments simples dans  $\mathbb{R}(X)$  des fractions :

- $\frac{X^4 - 5X + 1}{(X^2 + 1)^7}$
- $\frac{X^3 + X}{X^4 + X^2 + 1}$
- $\frac{X - 2}{2X^3 - 6X^2 + 6X - 2}$ .

**Exemple 5** • Soit  $n \geq 3$  un entier. Mettre l'expression  $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \frac{\omega^2 + 1}{X - \omega}$  sous la forme d'une fraction rationnelle irréductible.

- On considère le polynôme  $Q(X) = X^8 + X^7 - X + 3$ .
  1. Montrer que  $Q(X)$  est scindé à racines simples dans  $\mathbb{C}$ .
  2. Simplifier  $\sum_{z \in Z(Q)} \frac{1}{3 - z}$ .
- Soit  $n \geq 1$  un entier. On considère la fraction rationnelle  $F(X) = \frac{X + 1}{(X - 2) \cdot X^n}$ .
  1. Montrer que la fonction  $f : t \mapsto \frac{t + 1}{t - 2}$  admet un  $DL_n(0)$  et le calculer. On note  $f(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i + o(t^n)$ , ce développement limité.
  2. Montrer que la somme  $\sum_{i=1}^n \frac{a_{n-i}}{X^i}$  apparaît telle quelle dans la DES de la fraction  $F(X)$ .
  3. En déduire la DES de  $F(X)$ .
  4. Comment obtenir la DES de la fraction  $\frac{X + 3}{X \cdot (X + 2)^n}$  ?