# Chapitre 1 : Ensembles, applications et relations

## Table des matières

# 1 Éléments de logique

## 1.1 Premières notions

## 1.2 Assertions, variables, quantificateurs

**Définition 1** On appelle ***assertion*** ou ***proposition*** ou encore ***prédicat***, toute phrase correctement construite (bonne syntaxe et grammaire correcte) et possédant deux valeurs logiques : soit **VRAI**, soit **FAUX**. Une assertion $\mathscr{A}$ comporte des ***variables***. On dit qu'une variable $x$ est ***muette*** si elle n'intervient globalement pas dans la valeur logique de l'assertion $\mathscr{A}$. Dans le cas contraire, la variable $x$ est non muette et l'assertion $\mathscr{A}$ dépend de $x$. On la note dans ce cas $\mathscr{A}(x)$ pour mettre en évidence la dépendance de l'assertion $\mathscr{A}$ vis-à-vis de la variable $x$.

**Exemple 1** • Dans l'assertion $\mathscr{A}$ : « $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 \geqslant 2^n$ », quelles sont les variables ? Sont-elles muettes ?

**Définition 2** Une assertion possède également des ***quantificateurs*** : il en existe principalement deux :

- le quantificateur $\forall$ : « quel que soit » ou bien « pour tout »
- le quantificateur $\exists$ : « il existe ».

Une assertion comporte des virgules. Après la quantificateur $\forall$, la virgule signifie « on a » et après le quantificateur $\exists$, la virgule signifie « tel que ».

**Exemple 2** Déchiffrer les assertions suivantes :

- $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant n_0, \quad \left|\dfrac{n^2}{2^n}\right| \leqslant \varepsilon$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}, \quad y = \alpha \cdot x$
- $\exists x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad e^y \leqslant x$
- $\forall y \in \mathbb{R}, \quad \exists x \in \mathbb{R}, \quad e^y \leqslant x$

Ces assertions sont-elles vraies ou fausses ?

## 1.3 Connecteurs logiques

**Définition 3** Étant données deux assertions $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$, on peut former une troisième assertion à l'aide de ***connecteurs logiques***.

- la ***négation*** : la négation de $\mathscr{A}$ est l'assertion non $\mathscr{A}$ : elle est VRAIE lorsque $\mathscr{A}$ est FAUSSE et vice-versa.
- l'***intersection*** : l'intersection des assertions $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ est l'assertion « $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ ». Celle-ci n'est VRAIE que si $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont VRAIES simultanément.
- la ***réunion*** : la réunion des assertions $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ est l'assertion « $\mathscr{A}$ ou $\mathscr{B}$ ». Celle-ci est VRAIE si l'une au moins des deux assertions $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ est VRAIE.
- l'***implication*** : l'implication « $\mathscr{A} \Longrightarrow \mathscr{B}$ » est l'assertion suivante : l'implication est VRAIE signifie que le fait que $\mathscr{A}$ soit VRAIE entraîne que l'assertion $\mathscr{B}$ est VRAIE également.
- l'***équivalence*** : l'équivalence « $\mathscr{A} \Longleftrightarrow \mathscr{B}$ » est l'assertion suivante : l'équivalence est VRAIE signifie que le fait que les deux assertions $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ ont la même valeur logique.

## 1.4 Propriétés sur les connecteurs logiques

**Proposition 1** Soient $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ deux assertions. Alors :

- non ($\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$) = non $\mathscr{A}$ ou non $\mathscr{B}$
- non ($\mathscr{A}$ ou $\mathscr{B}$) $\Longleftrightarrow$ (non $\mathscr{A}$) et non $\mathscr{B}$
- non $(\exists x, \quad \mathscr{A}(x)) \Longleftrightarrow \forall x, \quad$ non $(\mathscr{A}(x))$
- non $(\forall x, \quad \mathscr{A}(x)) \Longleftrightarrow \exists x, \quad$ non $(\mathscr{A}(x))$
- $\Big[\mathscr{A} \Longrightarrow \mathscr{B}\Big] \Longleftrightarrow \Big[(\text{non } \mathscr{A}) \text{ ou } \mathscr{B}\Big] \Longleftrightarrow \Big[\text{non } \mathscr{B} \Longrightarrow \text{non } \mathscr{A}\Big]$
- $\Big[\mathscr{A} \Longleftrightarrow \mathscr{B}\Big] \Longleftrightarrow \Big[\mathscr{A} \Longrightarrow \mathscr{B} \text{ et } \mathscr{B} \Longrightarrow \mathscr{A}\Big]$

Méthode : Comment montrer une implication, une équivalence ?

Pour montrer l'implication $\mathscr{A} \Longrightarrow \mathscr{B}$

- ▶ supposer que $\mathscr{A}$ est vrai
- ▶ montrer alors que $\mathscr{B}$ est vrai.

On peut aussi :

- ▶ supposer que $\mathscr{B}$ est faux
- ▶ montrer alors que $\mathscr{A}$ est faux.[raisonnement par contraposition]

Pour montrer l'équivalence $\mathscr{A} \Longleftrightarrow \mathscr{B}$ :

- ▶ détecter l'implication [directe $\Longrightarrow$ ou réciproque $\Longleftarrow$] la plus facile et la montrer
- ▶ montrer alors l'autre implication.

**Exemple 3** • Donner la négation des assertions de l'exemple 2.

- Montrer que pour tout $a \in \mathbb{N}$, si $a^2$ est impair, alors $a$ est impair.
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$ est un entier.

# 2 Ensembles

## 2.1 Définition

**Définition 4** On appelle ***ensemble***, toute collection d'objets, ceux-ci étant appelés ***éléments*** de l'ensemble. On note $x \in E$ (lire $x$ appartient à $E$), pour signifier que l'ensemble $E$ contient l'élément $x$. Les ensembles sont notés entre accolades, soit en exprimant tous les éléments de cet ensemble dans un ordre quelconque, soit en exprimant les éléments à l'aide d'assertions.
Étant donnés deux ensembles $A$ et $B$, on dit que $A$ est ***inclus*** dans $B$ et on note $A \subset B$ pour signifier que tous les éléments de $A$ appartiennent aussi à $B$. On dit aussi que $A$ est une ***partie*** ou un ***sous-ensemble*** de $B$.

Méthode : Comment montrer une inclusion, une égalité entre deux ensembles ?

Pour montrer $A \subset B$,

- ▶ écrire : *« soit $x$ dans $A$ »*
- ▶ montrer que $x$ appartient à $B$.

Pour montrer l'égalité $A = B$ entre deux ensembles,

- ▶ identifier l'inclusion $A \subset B$ ou $B \subset A$ la plus facile, puis la montrer
- ▶ montrer alors l'autre inclusion.

**Exemple 4** • Comparer : $E = \left\{\dfrac{1+\cos x}{2} \; ; \; x \in \mathbb{R}\right\}$ et $E' = \Big\{x \in \mathbb{R} \mid \exists t \in ]0, +\infty[, \; x = \exp(-t^2)\Big\}$.

- Montrer que $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ 2x-3y+z=2 \end{array}\right.\right\} = \Big\{(1+4t, t, -5t) \; ; \; t \in \mathbb{R}\Big\}$.

## 2.2 Opérations sur les ensembles

**Définition 5** Étant donnés des ensembles, on peut en former d'autres :
- l'***intersection*** $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$
- la ***réunion*** $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$
- la ***différence*** $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$. Si $A \subset E$, on appelle ***complémentaire de*** $A$ ***dans*** $E$ l'ensemble $E \setminus A$
- la ***différence symétrique*** $A \vartriangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
- le ***produit cartésien*** $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ et } y \in B\}$
- la ***puissance*** $B^A$ ou $\mathscr{F}(A, B)$ l'ensemble des fonctions $f : A \longrightarrow B$
- l'***ensemble des parties de*** $E$ $\mathscr{P}(E) = \{A \mid A \subset E\}$.

**Remarque 1** • On peut généraliser les opérations précédentes. Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille de parties de $E$, on note :
- $\bigcap\limits_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I, \quad x \in A_i\}$
- $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I, \quad x \in A_i\}$
- $\prod\limits_{i \in I} A_i = \{(x_i)_{i \in I} \mid \forall i \in I, \quad x_i \in A_i\}$.
- Si $I = \{1, \cdots, n\}$ et $A_i = E$, alors $\prod\limits_{i \in I} A_i = E^n$ et $(x_i)_{i \in I} = (x_1, \cdots, x_n)$ sont appelés des $n$-***uplets*** d'éléments dans $E$.

## 2.3 Propriétés sur les ensembles

**Proposition 2** • Il existe un unique ensemble ne contenant aucun élément : c'est l'ensemble vide noté $\emptyset$.
- Pour tout ensemble $E$, on a $\emptyset \subset E$ (ou encore $\emptyset \in \mathscr{P}(E)$).
- (**lois de Morgan**) pour tous ensembles $A$, $B$ et $C$, on a :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \text{ et } A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad .$$

- pour toutes parties $A$ et $B$ de $E$, on a :

$$C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B \text{ et } C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B \quad .$$

**Exemple 5** Soient $A$, $B$ et $C$ trois ensembles.
- Montrer $(A \vartriangle B) \vartriangle C = A \vartriangle (B \vartriangle C)$.
- Montrer l'équivalence valable pour tous ensembles $A$, $B$ et $C$ :

$$B = C \Longleftrightarrow A \vartriangle B = A \vartriangle C.$$

**Exemple 6** Simplifier les ensembles :

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left] -\ln n, 1 - \frac{1}{n} \right] \text{ et } \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left] -\frac{1}{n}, \ln(n+1) - \ln n \right[.$$

# 3 Applications ou fonctions

## 3.1 Définitions

**Définition 6** On appelle ***fonction*** ou ***application*** $f : E \longrightarrow F$ la donnée :
- d'un ensemble $E$ appelé ***ensemble de départ***, ou ***source*** ou ***domaine de définition***
- d'un ensemble $F$ appelé ***ensemble d'arrivée*** ou ***but***
- d'une correspondance $x \longmapsto f(x)$ entre les éléments $x$ de $E$ et des éléments $f(x)$ de $F$. L'élément $f(x)$ est appelé ***image*** de $x$ par la fonction $f$.

Pour tout $y$ dans $F$, tout élément $x$ de $E$ vérifiant $f(x) = y$ est appelé ***antécédent*** de $y$ par la fonction $f$.
Soit $f : E \longrightarrow F$ une fonction. Soient $A$ une partie de $E$. On appelle ***ensemble image*** de $A$ par $f$, l'ensemble :

$$f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A, \quad y = f(x)\} = \{f(x) \in F \mid x \in A\}.$$

Soit $B$ une partie de $F$. On appelle ***image réciproque*** de $B$ par $f$, l'ensemble : $f^{[-1]}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$.

**Exemple 7** • Calculer l'image directe et l'image réciproque par la fonction $f : x \longmapsto e^x + e^{-x}$ définie sur $\mathbb{R}$ des ensembles $A = [-2, 3]$ et $B = ]-\infty, 2]$.
- Montrer que si $f : E \longrightarrow F$ est une fonction, alors pour toutes parties $A$ et $B$ de $E$, on a $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ et qu'en général, on n'a pas égalité.
- Si $f : E \longrightarrow F$ est une fonction, a-t-on $f^{[-1]}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{[-1]}(A_i)$ ou $f^{[-1]}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{[-1]}(A_i)$ pour toute famille $(A_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathscr{P}(F)$ ?

## 3.2 Composition de fonctions

**Définition 7** Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : E' \longrightarrow F'$ deux fonctions. Si pour tout $x \in E$, on a $f(x) \in E'$, on peut former la composée $g \circ f$ :

$$g \circ f : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F' \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array} \right. .$$

Ainsi, $\forall x \in E$, $g \circ f(x) = g(f(x))$.

**Exemple 8** Calculer $g \circ f$ et $f \circ g$ lorsque cela est possible :
- $f : x \longmapsto \cos(x + 2)$ et $g : x \longmapsto x^2 + 2x + 4$
- $f : x \longmapsto \ln(-x)$ et $g : x \longmapsto x^2 + x + 1$
- $f : x \longmapsto \ln(1 + 3e^x + e^{-x})$ et $g : x \longmapsto \ln x$.

**Exemple 9** Soit $E$ un ensemble. On appelle ***fonction identité de*** $E$, l'application suivante :

$$\mathrm{id}_E : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right. .$$

- Si $f \in E^E$, que valent les applications $f \circ \mathrm{id}_E$ et $\mathrm{id}_E \circ f$ ?
- Soit $f : x \longmapsto \sqrt{x^2 + 3x + 5}$. Résoudre l'équation $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ d'inconnue $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Résoudre l'équation $h \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ d'inconnue $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

**Proposition 3** • La composition n'est pas commutative : il n'y a aucun lien entre les composées $g \circ f$ et $f \circ g$.

• La composition est associative : si $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ et $h : G \longrightarrow H$ sont trois fonctions, alors toutes les compositions suivantes sont possibles et on dispose de la formule :

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Ceci autorise à noter $h \circ g \circ f : E \longrightarrow H$ la fonction précédente.

### 3.3 Applications injectives, surjectives et bijectives

**Définition 8** Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.
On dit que la fonction $f$ est ***injective*** si :

$$\forall (x, x') \in E^2, \quad f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'.$$

On dit que la fonction $f$ est ***surjective*** si :

$$\forall y \in F, \quad \exists x \in E, \quad y = f(x).$$

On dit que la fonction $f$ est ***bijective*** si elle est à la fois injective et surjective.

Méthode : Comment montrer qu'une fonction $f : E \longrightarrow F$ est injective ?

Pour montrer l'injectivité :
- écrire : « *soient $x$ et $x'$ dans $E$ tels que $f(x) = f(x')$* »
- montrer que $x = x'$.

Méthode : Comment montrer qu'une fonction $f : E \longrightarrow F$ est surjective ?

Pour montrer la surjectivité :
- écrire : « *soit $y$ dans $F$* »
- trouver un $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

**Proposition 4** Soit $f : E \longrightarrow F$ une bijection. Soit $y \in F$. L'équation $y = f(x)$, d'inconnue $x \in E$ admet une seule solution dépendant de $y$. On note $x = f^{-1}(y)$ l'unique antécédent de $y$ par $f$. On définit ainsi l'application :

$$\begin{array}{rcl} f^{-1} : F & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \alpha = f^{-1}(x) = \text{l'unique solution de l'équation } f(\alpha) = x, \text{ d'inconnue } \alpha \in E \end{array}$$

Cette application est appelée ***fonction réciproque*** de la fonction bijective $f$.

Méthode : Comment montrer qu'une fonction $f : E \longrightarrow F$ est bijective ?

• On peut montrer que $f$ est à la fois injective et surjective

• On peut :
- fixer $y$ dans $F$
- résoudre l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$
- trouver une seule solution : on aura alors la fonction réciproque $f^{-1}$.

On peut faire l'étude de la fonction $f$ en faisant le cas échéant le tableau de variation pour utiliser le théorème de la bijection.

**Exemple 10** On pose $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$ ; $f_2 : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$ ; $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $x \longmapsto x^2$ ; $f_4 : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $x \longmapsto x^2$ ; $f_5 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $x \longmapsto x^2$ et $f_6 : \mathbb{Q}_+ \longrightarrow \mathbb{Q}_+$, $x \longmapsto x^2$.
Que peut-on dire des fonctions $f_1$, $f_2$, $f_3$, $f_4$, $f_5$ et $f_6$ ?

**Définition 9** • Si $f : E \longrightarrow F$ est une fonction et $A \subset E$, on appelle ***restriction*** de $f$ à $A$, et on note $f_{|A}$, la fonction :

$$f_{|A} : \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right. .$$

• Si $f : E \longrightarrow F$ est une fonction et $B$ est une partie de $F$ contenant $f(E)$, on appelle ***corestriction*** de $f$ à $B$, l'application :

$$f^{|B} : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right. .$$

• Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : E' \longrightarrow F'$ deux fonctions. On dit que $g$ ***prolonge*** $f$ (ou que $g$ est un ***prolongement*** de $f$) si $E \subset E'$, $F \subset F'$ et $\forall x \in E$, $g(x) = f(x)$. On dit aussi que la fonction $f$ est une (co)-restriction de la fonction $g$.

### 3.4 Propriétés

**Proposition 5** Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux fonctions.
- si $f$ et $g$ sont injectives, alors $g \circ f$ aussi
- si $f$ et $g$ sont surjectives, alors $g \circ f$ aussi
- si $f$ et $g$ sont bijectives, alors $g \circ f$ aussi et de plus $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$
- si $g \circ f$ est injective, alors $f$ est injective
- si $g \circ f$ est surjective, alors $g$ est surjective

**Proposition 6** Soit $f : E \longrightarrow F$ une fonction, l'ensemble $E$ étant non vide.
Alors :

$$\begin{array}{c} \text{la fonction } f \text{ est injective} \\ \Longleftrightarrow \\ \text{il existe une fonction } g : F \longrightarrow E \text{ telle que } g \circ f = \mathrm{id}_E. \end{array}$$

On dit que la fonction $f$ est inversible à gauche et que la fonction $g$ est un inverse à gauche de la fonction $f$.
De plus, en utilisant l'axiome du choix, on dispose de l'équivalence suivante :

$$\begin{array}{c} \text{la fonction } f \text{ est surjective} \\ \Longleftrightarrow \\ \text{il existe une fonction } h : F \longrightarrow E \text{ telle que } f \circ h = \mathrm{id}_F. \end{array}$$

On dit que la fonction $f$ est inversible à droite et que la fonction $h$ est un inverse à droite de la fonction $f$.

**Proposition 7** Soit $f : E \longrightarrow F$ une bijection. Alors, $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$.

**Exemple 11** Les applications suivantes sont-elles des bijections ? Si oui, donner lorsque cela est possible la réciproque $f^{-1}$ :
$\longrightarrow$ $f : x \longmapsto \ln(1 + x + x^2)$ de $[0, +\infty[$ vers $[0, +\infty[$ ;
$\longrightarrow$ $f : X \longmapsto (2\mathbb{N}) \cap X$, de $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ vers $\mathscr{P}(2\mathbb{N})$ ;

$\longrightarrow$ $\Phi : f \longmapsto g \circ f$, de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans lui-même , où $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction ;
$\longrightarrow$ $f : (x, y, z) \longmapsto (2x + z, x + my + z, x - y + 2z)$ de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$, où $m \in \mathbb{R}$.

- Si $f : E \longrightarrow F$ est une bijection, si $A$ est une partie de $F$, montrer que $f^{-1}(A) = f^{[-1]}(A)$.

**Exemple 12** Soit $E$ un ensemble. Pour toute partie $A$ de $E$, on appelle ***fonction indicatrice de la partie*** $A$, la fonction notée $\mathbf{1}_A$ à valeurs dans l'ensemble à deux éléments $\{0, 1\}$ :

$$\mathbf{1}_A : \left| \begin{array}{ccl} E & \longrightarrow & \{0,1\} \\ x & \longmapsto & \mathbf{1}_A(x) = \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ si } x \in A \\ 0, \text{ sinon} \end{array} \right. \end{array} \right. .$$

1. Proposer des expressions de $\mathbf{1}_{E \setminus A}$, $\mathbf{1}_{A \cap B}$, $\mathbf{1}_{A \cup B}$ ou $\mathbf{1}_{A \Delta B}$ en fonction de $\mathbf{1}_A$ ou $\mathbf{1}_B$.
2. Montrer que l'application :
$$\Phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{F}(E, \{0,1\}) \\ A & \longmapsto & \mathbf{1}_A \end{array} \right.$$
est une bijection.
3. Quelle est sa bijection réciproque ?

# 4 Cardinalité finie

## 4.1 Premières propriétés

**Définition 10** Soit $E$ un ensemble. On dit que l'ensemble $E$ est ***fini*** s'il comporte un nombre fini d'éléments. Dans ce cas, on appelle ***cardinal de*** $E$, le nombre total de ses éléments, entier naturel noté $\text{Card}(E)$ ou $\#(E)$.

**Proposition 8** Voici les principales propriétés générales concernant les ensembles finis :

- Si $E$ est un ensemble fini, alors toute partie $A$ de $E$ est encore finie et $\#(A) \leqslant \#(E)$.
- Si $A$ et $B$ sont deux ensembles finis, alors $A \cup B$ également et : $\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)$.
- Si $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ est une famille finies d'ensembles finis, alors le produit cartésien $\prod_{k=1}^{r} A_k$ est encore fini et $\#\left(\prod_{k=1}^{r} A_k\right) = \prod_{k=1}^{r} \#(A_k)$.
- Si $E$ est un ensemble fini de cardinal $n$, alors l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ de toutes les parties de $E$ est en ensemble fini et $\#(\mathscr{P}(E)) = 2^n$. Si $k \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathscr{P}_k(E)$ des parties de $E$ à $k$ éléments est encore un ensemble fini et $\#(\mathscr{P}_k(E)) = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)$ [coefficient binomial]
- Si $A$ et $B$ sont deux ensembles finis et si $\left\{ \begin{array}{l} A \subset B \\ \#(A) = \#(B) \end{array} \right.$, alors $A = B$.

## 4.2 Ensembles finis et fonctions

**Proposition 9** Soit $f : E \longrightarrow F$ une fonction entre un ensemble fini $E$ de cardinal $n$ et un ensemble quelconque $F$.

- Si la fonction $f$ est bijective, alors l'ensemble $F$ est fini et $\#(F) = \#(E) = n$.
- Principe des tiroirs

Si la fonction $f$ est injective, alors l'ensemble $F$ compte au moins $n$ éléments . Par contraposé, si $\#(F) < n$, alors la fonction $f$ n'est pas injective.

- Si la fonction $f$ est surjective, alors l'ensemble $F$ est fini et compte au maximum $n$ éléments. Par contraposé, si l'ensemble $F$ compte strictement plus de $n$ éléments, alors la fonction $f$ n'est pas surjective.
- Principe des bergers

Si la fonction $f$ est surjective et que pour tout $y \in F$, l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ contient toujours le même nombre d'éléments $q$, alors :

$$\#(E) = q \times \#(F).$$

- Si les ensembles $E$ et $F$ sont finis de même cardinal, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

$$f \text{ est bijective} \iff f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective} .$$

### 4.3 Premiers exemples

**Exemple 13** • Pour tous entiers $p \leqslant q$, déterminer $\#(\llbracket p, q \rrbracket)$.
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geqslant n$.
- Soient $E$ et $F$ deux ensembles finis non vides avec $\#(E) = p$ et $\#(F) = q$.

1. Déterminer le nombre total de fonctions $f : E \longrightarrow F$.
2. Parmi ces fonctions, combien sont-elles injectives ?
3. Parmi ces fonctions, combien sont-elles bijectives ?

**Exemple 14** Soient $p$ et $n$ dans $\mathbb{N}^*$ tels que $p \leqslant n$. On note $\mathscr{I}(p, n)$, l'ensemble des fonctions injectives de $\llbracket 1, p \rrbracket$ vers $\llbracket 1, n \rrbracket$.

1. Calculer $\#(\mathscr{I}(p, n))$.
2. Montrer que l'application $s : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{I}(p,n) & \longrightarrow & \mathscr{P}_p(\llbracket 1, n \rrbracket) \\ f & \longmapsto & f(\llbracket 1, p \rrbracket) \end{array} \right.$ est bien définie et surjective.
3. Si $A \in \mathscr{P}_p(\llbracket 1, n \rrbracket)$, calculer $\#(s^{-1}(\{A\}))$.
4. Démontrer la formule : $\#(\mathscr{P}_p(\llbracket 1, n \rrbracket) = \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$.

**Exemple 15** Soit $b \geqslant 2$ un entier. Soit $r \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que l'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \llbracket 0, b-1 \rrbracket^r & \longrightarrow & \llbracket 0, b^r - 1 \rrbracket \\ (\varepsilon_0, \cdots, \varepsilon_{r-1}) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} \varepsilon_k \cdot b^k \end{array} \right.$ est bien définie.
2. Montrer que l'application $f$ est injective.
3. En déduire que l'application $f$ est bijective.
4. Conclure que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un seul $(s+1)$-uplet $(\varepsilon_0, \cdots, \varepsilon_s)$ d'éléments dans $\llbracket 0, b-1 \rrbracket$ tel que :

$$n = \sum_{k=0}^{s} \varepsilon_k \cdot b^k \text{ et } \varepsilon_s \neq 0.$$

Cette écriture est la ***décomposition en base** $b$ **de l'entier** $n$.*

## 5 Relations binaires

**Définition 11** Soit $E$ un ensemble. On appelle ***relation*** $\mathscr{R}$ sur $E$, toute partie de $E^2$. Pour tout $(x, y) \in E^2$, on note $(x, y) \in \mathscr{R} \iff x\mathscr{R}y$.

## 5.1 Relations d'ordre

### 5.1.1 Définitions

**Définition 12** Soit $\mathscr{R}$ une relation sur $E$. On dit que $\mathscr{R}$ est une ***relation d'ordre*** si :
- la relation est ***réflexive*** : $\forall x \in E,\ x\mathscr{R}x$
- la relation est ***transitive*** : $\forall (x,y,z) \in E^3,\ \Big[x\mathscr{R}y \text{ et } y\mathscr{R}z\Big] \Longrightarrow x\mathscr{R}z$
- la relation est ***anti-symétrique*** : $\forall (x,y) \in E^2,\ \Big[x\mathscr{R}y \text{ et } y\mathscr{R}x\Big] \Longrightarrow x = y$.

On dit que la relation d'ordre $\mathscr{R}$ est ***totale*** si tous les éléments de $E$ sont comparables entre eux :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \Big[x\mathscr{R}y \quad \text{ou} \quad y\mathscr{R}x\Big].$$

Dans le cas contraire, on dit que la relation d'ordre est ***partielle***.

**Exemple 16** • La relation $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$ est une relation d'ordre totale.
- Si $E$ est un ensemble, la relation d'inclusion $\subset$ est une relation d'ordre partielle sur $\mathscr{P}(E)$ si et seulement si $E$ contient au moins deux éléments.
- Sur $\mathbb{R}^2$, la relation $(x,y) \preceq (x',y') \Longleftrightarrow \begin{cases} x < x' \\ \text{ou} \\ x = x' \text{ et } y \leqslant y' \end{cases}$ est une relation d'ordre totale appelée ordre ***lexicographique***.

### 5.1.2 Notions relatives aux relations d'ordre

**Définition 13** Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné. Soit $A$ une partie de $E$.
On dit que la partie $A$ est ***minorée*** si : $\exists m \in E, \quad \forall x \in A, \quad m \preceq x$. De tels éléments $m$ sont appelés ***minorants*** de la partie $A$.
On dit que $A$ admet un ***plus petit élément*** si : $\exists x_0 \in A, \quad \forall x \in A, \quad x_0 \preceq x$. Lorsqu'il existe, le plus petit élément est unique.
On dit que la partie $A$ admet une ***borne inférieure*** s'il existe un plus grand minorant. Lorsqu'elle existe, elle est unique, elle est notée $\inf A$ et il s'agit du plus grand de tous les minorants (en quelque sorte, le minorant optimal...)
On dit que la partie $A$ est ***majorée*** si : $\exists M \in E, \quad \forall x \in A, \quad x \preceq M$. De tels éléments $M$ sont appelés ***majorants*** de la partie $A$.
On dit que $A$ admet un ***plus grand élément*** si : $\exists x_1 \in A, \quad \forall x \in A, \quad x \preceq x_1$. Lorsqu'il existe, le plus grand élément est unique.
On dit que la partie $A$ admet une ***borne supérieure*** s'il existe un plus petit majorant. Lorsqu'elle existe, elle est unique, elle est notée $\sup A$ et il s'agit du plus petit de tous les majorants (en quelque sorte, le majorant optimal...)

**Exemple 17** • Toute partie non vide et majorée de $(\mathbb{R}, \leqslant)$ admet une borne supérieure et toute partie non vide minorée de $(\mathbb{R}, \leqslant)$ admet une borne inférieure.
- On considère l'ensemble $E = \mathbb{R}^*$ muni de la relation habituelle $\leqslant$. Alors, l'ordre est total, l'intervalle $]0,1]$ est minoré par $-1$ mais l'intervalle $]0,1]$ n'admet pas de borne inférieure.
- On considère sur $E = \mathscr{P}(\mathbb{R})$ muni de la relation d'inclusion, l'ensemble $A = \Big\{\mathbb{Z}, [-3,7[\Big\}$. L'ensemble $A$ est-il majoré ? admet-il un plus grand élément ? admet-il une borne supérieure ? est-il minoré ? admet-il un plus petit élément ? admet-il une borne inférieure ?

## 5.2 Relations d'équivalence

### 5.2.1 Définitions

**Définition 14** Soit $E$ un ensemble. Soit $\mathscr{R}$ une relation sur $E$. On dit que $\mathscr{R}$ est une ***relation d'équivalence*** si :

- la relation est réflexive : $\forall x \in E,\ x\mathscr{R}x$
- la relation est transitive : $\forall (x,y,z) \in E^3,\ \Big[x\mathscr{R}y \text{ et } y\mathscr{R}z\Big] \Longrightarrow x\mathscr{R}z$
- la relation est ***symétrique*** : $\forall (x,y) \in E^2,\ x\mathscr{R}y \Longrightarrow y\mathscr{R}x$.

Dans ce cas, pour tout $x \in E$, on appelle ***classe d'équivalence*** de $x$ ***modulo*** $\mathscr{R}$, l'ensemble des éléments $y$ de $E$ en relation avec $x$ :

$$C_x = \{y \in E \mid x\mathscr{R}y\}.$$

On note $E/\mathscr{R}$ l'ensemble ***quotient***, c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalence modulo $\mathscr{R}$.

**Exemple 18** • La relation $(p,q)\mathscr{R}(p',q') \Longleftrightarrow pq' = p'q$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Quel est l'ensemble quotient ?

• La relation $p\mathscr{R}q \Longleftrightarrow p = q[n]$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$ (avec un entier $n \geqslant 1$ fixé). Quel est l'ensemble quotient ?

### 5.2.2 Partitions

**Définition 15** Soit $E$ un ensemble. Soit $\mathscr{U}$ une partie de $\mathscr{P}(E)$ (c'est-à-dire un ensemble de parties de $E$). On dit que $\mathscr{U}$ forme une ***partition*** de $E$ si :

- tous les éléments de $\mathscr{U}$ sont non vides $\Big(\forall A \in \mathscr{U},\ A \neq \emptyset\Big)$
- tous les éléments de $\mathscr{U}$ sont deux à deux disjoints $\Big(\forall (A,A') \in \mathscr{U}^2,\ A \neq A' \Longrightarrow A \cap A' = \emptyset\Big)$
- la réunion des éléments de $\mathscr{U}$ forme $E$ tout entier $\Big(\bigcup\limits_{A \in \mathscr{U}} A = E\Big)$.

Les deux derniers points donnent lieu à la notation :

$$E = \bigsqcup_{A \in \mathscr{U}} A.$$

**Exemple 19** Si $E$ est un ensemble non vide, alors l'ensemble $\mathscr{U}$ formé de tous les singletons de $E$ forme une partition.

### 5.2.3 Utilité d'une relation d'équivalence

**Proposition 10** Soit $E$ un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\mathscr{R}$. Alors l'ensemble quotient $E/\mathscr{R}$ forme une partition de $E$.

**Exemple 20** Soit $f : E \longrightarrow F$ une fonction entre deux ensembles non vides.
Déterminer une Condition Nécessaire et Suffisante sur la fonction $f$ pour que l'ensemble $\mathscr{U} = \Big(f^{[-1]}(\{y\})\Big)_{y \in F}$ forme un partition de l'ensemble $E$.
Toutes les partitions de l'ensemble $E$ sont-elles nécessairement de la forme précédente avec la CNS remplie ?