TD d'Algorithmique/Modélisation

Exercice 1

1. Soit L une liste d'entiers relatifs. Imaginons un ascenseur dont la position initiale est à l'étage numéro $L[0]$ (si L est non vide). Il se dirige ensuite, vers l'étage $L[1]$, puis $L[2]$, etc... Lors de son mouvement, l'ascenseur monte d'étage en étage, ou bien descend d'étage en étage ou bien encore reste immobile. Nous associons à la liste L, la liste des mouvements élémentaires de l'ascenseur, à savoir 1 pour un mouvement d'un étage vers le haut, (-1) pour un mouvement d'un étage vers le bas et 0 pour une immobilité correspondant à deux occurrences successives identiques dans la liste L.
2. Rédiger une fonction `Formatage(L)` qui à partir d'une liste constituée d'entiers relatifs L donne la liste M composée des quantités entières -1, 1 ou 0, associées aux mouvements élémentaires de l'ascenseur. Par exemple, si $L = [1, 7, 7, 7, -2, 3]$, la fonction doit renvoyer la liste

$$[1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 1, 1].$$

3. Faire une procédure qui à partir d'une liste L trace le mouvement de l'ascenseur, c'est-à-dire la ligne polygonale où l'extrémité gauche est $(0, L[0])$ et les points suivants de la forme (k, e_k), avec $k \in \mathbb{N}$ et e_k décrivant les numéros des étages successifs visités par l'ascenseur.

Exercice 2

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} x' = x \cdot (2 - y) \\ y' = y \cdot (x - 1) \\ \text{condition initiale : } x(1) = 2 \text{ et } y(1) = 1 \end{cases}.$$

Tracer sur un même graphique les éléments suivants :

- la courbe $x = x(t)$ en rouge, la courbe $y = y(t)$ en bleu, chacune sur l'intervalle $[-10, 10]$
- un quadrillage du graphique
- les axes de coordonnées en noir
- une légende étiquetant les deux courbes
- un titre
- le point sur chaque courbe associé à la condition initiale.

Tracer le portrait de phase y en fonction de x avec un quadrillage, le point associé à la condition initiale et un titre.
Pour résoudre de façon approchée ce système, on appliquera la méthode d'Euler avec un pas de discrétisation $h = 0.001$.

Exercice 3

On rappelle qu'un entier strictement supérieur à 1 est dit *premier* si ses seuls diviseurs strictement positifs sont 1 et lui-même.
On dit qu'un entier p est un nombre *premier jumeau* si les entiers p et $p+2$ sont premiers. Le couple $(p, p+2)$ est alors appelé *couple de premiers jumeaux*.
On dit qu'un nombre p est parfait si p est un entier naturel strictement positif et si la somme de tous les diviseurs entiers strictement positifs de p vaut $2p$.

1. Rédiger une fonction `Test_Premier(p)` testant si l'entier p est premier ou non.
2. Fournir la liste des 100 premiers couples jumeaux.
3. Rédiger une fonction `Test_Parfait(p)` testant si l'entier p est parfait.
4. Fournir tous les entiers parfaits compris entre 1 et 1000.

Exercice 4

On considère une liste $L = [a_0, \cdots, a_{s-1}]$ de nombres flottants et on procède à l'algorithme suivant :

- on considère les éléments de L dans le sens de la lecture que l'on va ranger dans des piles verticales, les piles étant disposées de gauche à droite
- le premier élément débute la première pile
- au cours de la lecture, si l'élément a_k [avec $k \geqslant 1$] de la liste L est considéré, on tente de placer l'élément a_k au sommet de l'une des piles déjà existante, à la condition que a_k soit supérieur ou égal à l'élément sur lequel on pose a_k et si cela n'est pas possible, l'élément a_k début une nouvelle pile tout à droite
- par exemple, si la liste L vaut $L = [1, 3, 4, 2, 3, 2, 5, 7, 1, 10, 8, 9, 7]$, alors le résultat final après le processus décrit est la disposition en piles suivante :

10			
7			
5	9		
4	8		
3	3	7	
1	2	2	1
Pile 1	Pile 2	Pile 3	Pile 4

1. Rédiger une fonction `Piles(L)` permettant d'obtenir la liste des piles ainsi construites, à partir d'une liste L de flottants. Lorsque `L=[1,3,4,2,3,2,5,7,1,10,8,9,7]`, le résultat attendu est `[[1,3,4,5,7,10],[2,3,8,9],[2,7],[1]]`.

Étant donnée une liste $L = [a_0, \cdots, a_{s-1}]$ de flottants, on appelle sous-liste croissante, toute liste $M = [a_{i_0}, a_{i_1}, \cdots, a_{i_r}]$, avec les indices i_k vérifiant : $0 \leqslant i_0 < i_1 < \cdots < i_r \leqslant s-1$ et pour tout $k \in [\![0, r-1]\!]$, $a_{i_k} \leqslant a_{i_{k+1}}$. De même, on appelle sous-liste strictement décroissante, toute liste $M = [a_{i_0}, a_{i_1}, \cdots, a_{i_r}]$, avec les indices i_k vérifiant : $0 \leqslant i_0 < i_1 < \cdots < i_r \leqslant s-1$ et pour tout $k \in [\![0, r-1]\!]$, $a_{i_k} > a_{i_{k+1}}$.
On considère le script suivant :

```
def X_s(L) :
    s=len(L)
    m,imax=0,0
    T,Pred=s*[0],s*[0]
    for j in range(s) :
        aux=0
        iaux=None
        for i in range(j) :
            if L[i]<=L[j] and T[i]>aux :
                aux=T[i]
                iaux=i
        T[j]=1+aux
        Pred[j]=iaux
        if T[j]>m :
            m=T[j]
            jmax=j

    iaux=jmax
    Res=m*[0]
    i=m-1
    while iaux != None :
        Res[i]=iaux
        iaux=Pred[iaux]
        i-=1
    return m
```

2. Ètant donnée une liste L de flottants, expliquer le fonctionnement de la fonction `X_s(L)` permettant d'obtenir la longueur de la plus longue sous-liste croissante.
   Vérifier que la liste `[L[i] for i in Res]` est une sous-liste croissante de longueur maximale.
3. Rédiger en conséquence la fonction `Y_s(L)` la longueur de la plus longue sous-liste strictement décroissante.

4. On se donne un entier $s \in \mathbb{N}^*$. On pioche au hasard dans l'intervalle $[0,1]$ (utiliser la syntaxe `uniform(0,1)`) s nombres réels $a_0, \cdots, a_{s-1}$ pour constituer la liste aléatoire L de longueur s. On note $U_s(L)$ et $V_s(L)$ respectivement la hauteur maximale des piles obtenues précédemment et la nombre de ces piles. On note $X_s(L)$ et $Y_s(L)$ respectivement les longueurs de la plus longue sous-liste croissante de L et la longueur de la plus longue sous-liste strictement décroissante de L. Rédiger une fonction `Esperances(s)` permettant sur 1000 essais indépendants d'obtenir une valeur approchée des espérances $\mathbb{E}(U_s)$, $\mathbb{E}(V_s)$, $\mathbb{E}(X_s)$ et $\mathbb{E}(Y_s)$ des variables aléatoires U_s, V_s, X_s et Y_s ainsi construites.
5. Lorsque s varie de 10 en 10 entre 10 et 100, construire les quatre lignes polygonales traçant les valeurs approchées des espérances divisées par s, en fonction de s. On fera apparaître une figure légendée.
6. Que peut-on dire du résultat obtenu ?